N° d'Ordre : 5 (1970)

THESE

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ès-SCIENCES PHYSIQUES

par

André CHOMARAT

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PLAQUES ORTHOTROPES DANS LES DOMAINES ELASTIQUE ET PLASTIQUE

APPLICATION AUX PLAQUES CHARGEES PAR UNE PRESSION CONSTANTE

Soutenue le 18 avril 1970 devant la Commission d'Examen

M. TARDY Président

M. VILAINE
M. POUSSET } Examinateurs
M. GACHON

N° d'Ordre: 5(1970)

THESE

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ès-SCIENCES PHYSIQUES

par

André CHOMARAT

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PLAQUES ORTHOTROPES DANS LES DOMAINES ELASTIQUE ET PLASTIQUE

APPLICATION AUX PLAQUES CHARGEES PAR UNE PRESSION CONSTANTE

Soutenue le 18 avril 1970 devant la Commission d'Examen

M. TARDY Président

M. VILAINE
M. POUSSET } Examinateurs
M. GACHON

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE NANTES

FACULTE DES SCIENCES

Doyen	M. DUNOYER de SEGONZAC	Chimie
Assesseur	M. SELLIER	Zoologie
Professeurs	M. PAUC	Mathématiques
	M. RAVILLY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. RAFFIN	Mécanique rationnelle
	M. GARRIGUES	Biologie végétale
	M. BRILLOUET	Analyse numérique
	M. GRAFF	Chimie
	M. VIVIER (E.N.S.M.)	Mathématiques appliquées
	M. COLLET	Physique
	M. BOULLOUD (C.S.U.)	Physique
	Melle DEBRAUX	Botanique
	M. PETRESCO	Mathématiques
	M. PIERI	Biologie animale
	M. WOJTKOWIAK	Chimie
	M. AVIGNON	Physique
	M. MINN	Physique
	M. MOUTON	Physique
	M. TARDY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. MOLINARO	Mathématiques
Professeurs sans chaire	M. GOBIN (E.N.S.M.	Chimie
	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
	M. MEZENCEV (E.N.S.M.)	Physique
	M. DUPONT	Biologie végétale
	M. ROUXEL	Chimie
	M. QUINIOU	Chimie
	Melle OFFRET (E.N.S.M.)	Physique
	M. LASKAR	Physique
	M. GOUREAUX	Physique

Maîtres de Conférences	M. FORESTIER	Sciences de la Terre
	M. SAUDRAY	Biologie animale
	M. MARTIN	Chimie
	M. LE DOUARIN Georges	Biologie végétale
	M. AMOURIQ	Psychophysiologie
	Melle ASTIE (C.S.U.)	Botanique
	M. LAMEAU (E.N.S.M.)	Mathématiques
	Mme LE DOUARIN Nicole	Biologie végétale
	M. TOURNOUX	Chimie minérale
	M. GUEVEL (E.N.S.M.)	Mathématiques
	M. GOUIN (C.S.U.)	Chimie
	M. POINTEAU (E.N.S.M.)	Chimie
	M. SULMONT (E.N.S.M.)	Mathématiques
	M. BARDON	Physique
	M. LONCKE	Physique
	M. LEBRUN	Biologie animale
	Mme NICOLAS	Biologie végétale
	M. IBISCH	Maître de Conférences associé
	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. ROSIER	Physique
	M. LEBORGNE	Mathématiques
	Melle LEYCURAS	Physique
	M. REMY (C.S.U.)	Chimie
	M. LE BIHAN	Physique
	M. MATZ (C.S.U.)	Biologie
	M. CHABANEL	Chimie
	M. NICOLAS	Sciences de la Terre
Secrétaire de la Faculté	M. PAILLET	Attaché Principal

Au souvenir de ma Mère

à ma Femme.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555016_0027

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Résistance des Matériaux de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, sous la direction de Monsieur le Professeur TARDY Directeur du Laboratoire.

Nous tenons à exprimer ici notre profonde gratitude et à adresser nos remerciements à Monsieur le Professeur TARDY qui a bien voulu accepter la Présidence de notre Jury.

Nous voudrions particulièrement remercier Monsieur VILAINE Maître de Conférences à l'E.N.S.M., Monsieur POUSSET du Centre Technique Industriel de la Construction Métallique et Monsieur GACHON Professeur de Résistance des Matériaux à l'Ecole Nationale des Arts et Métiers, qui ont bien voulu nous faire l'honneur de participer au Jury.

Nous adressons nos remerciements à tous les techniciens, élèves et chercheurs qui ont contribué à la réalisation de cette étude.

S O M M A I R E

-:-:-:-:-

Pages

NOTATIONS

1 - DOMAINE ELASTIQUE

1.1 - INTRODUCTION 1

1.1.1. - Généralités

1.1.2. - Equations différentielles des plaques

1.2 - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CONNAISSANCES ACTUELLES SUR LE COMPORTEMENT DES PLAQUES ORTHOTROPES DANS LE DOMAINE ELASTIQUE 7

1.2.1. - Méthodes de calcul

1.2.2. - Travaux relatifs à la méthode des rigidités équivalentes (sans effet de membrane)

1.2.3. - Travaux se rapportant au calcul des plaques très minces avec raidisseurs (effet de membrane éventuel)

1.3 - COMPLEMENTS PERSONNELS SUR LES THEORIES PRECEDENTES 13

1.3.1. - Détermination des rigidités équivalentes d'une plaque orthotrope

1.3.1.1 - Détermination de Dx

1.3.1.2 - Détermination de Dy

1.3.1.3 - Détermination de Dxy

1.3.1.4 - Détermination de D

1.3.2. - Etude de plaques très minces avec raidisseurs

1.3.2.1 - Etude de la déformée. Cas des faibles déformations

1.3.2.2 - Etude de la déformée. Cas des grandes déformations

Pages

1.3.3. - Flèche au centre d'une plaque orthotrope soumise à une charge constante

1.3.3.1 - Cas des faibles déformations

1.3.3.2 - Flèche au centre des raidisseurs

1.3.3.3 - Cas des grandes déformations

1.3.4. - Détermination des contraintes et des dilatations linéiques pour les plaques chargées par une pression uniforme

1.3.4.1 - Moments de flexion

1.3.4.2 - Contraintes dûes aux moments de flexion

1.3.4.3 - Contraintes dûes à l'effet de membrane

1.4 - RECHERCHE THEORIQUE DU POIDS MINIMUM POUR L'ENSEMBLE PLAQUE-RAIDISSEURS CHARGE PAR UNE PRESSION CONSTANTE 69

1.4.1. - Flèche maximum imposée

1.4.2. - Contrainte maximum imposée

1.5 - ETUDE EXPERIMENTALE DES PLAQUES SOUS PRESSION CONSTANTE 89

1.5.1. - Généralités sur l'expérimentation des plaques

1.5.1.1 - Dispositif expérimental de mise en pression constante

1.5.1.2 - Conditions d'expérimentation des plaques

1.5.1.3 - Réalisation des plaques

1.5.1.4 - Caractéristiques des plaques

1.5.1.5 - Calculs d'erreurs

1.5.2. - Résultats expérimentaux

1.5.3. - Interprétation

2 - DOMAINE PLASTIQUE

2.1 - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE 121

Pages

2.2 - RECHERCHE PERSONNELLE SUR LE COMPORTEMENT DES PLAQUES AVEC RAIDISSEURS AU DELA SU DOMAINE ELASTIQUE LORSQUE CES PLAQUES TRES MINCES SONT SOUMISES A UNE PRESSION CONSTANTE 113 123

2.2.1. - Généralités

2.2.2. - Détermination de la charge critique de voilement

2.2.2.1 - Hypothèses

2.2.2.2 - Charge critique de voilement

2.2.3. - Relation entre la charge critique de voilement et la charge constante

2.2.3.1 - Energie prise par le raidisseur en compression

2.2.3.2 - Travail des forces extérieures - Charge répartie q

2.2.3.3 - Relation entre P_{cr} et q

2.2.4. - Flexion au delà du voilement

2.2.4.1 - Flèche au centre du raidisseur

2.2.4.2 - Remarques sur l'expression de la flèche

2.2.4.3 - Flèche au centre de la plaque

2.2.5. - Application

2.2.5.1 - Rappel des caractéristiques de la plaque 610

2.2.5.2 - Application numérique

2.2.6. - Comportement de la plaque dans le domaine plastique

2.2.6.1 - Caractéristiques du matériau

2.2.6.2 - Flexion dans le domaine plastique

2.2.6.3 - Application à la flexion des raidisseurs

2.2.6.4 - Application numérique : détermination de Me pour la plaque 610.

2.3 - ETUDE EXPERIMENTALE 141

2.3.1. - Mesures des flèches

2.3.2. - Interprétation des résultats

3 - CONCLUSION

4 - BIBLIOGRAPHIE

N O T A T I O N S

-:-:-:-:-

Système d'axes trirectangles O x y z

$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}$ matrice des composantes du tenseur des contraintes planes

$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix}$ matrice des composantes du tenseur des déformations

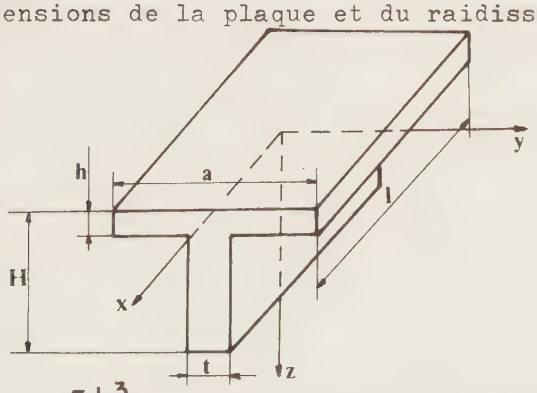
E Module d'élasticité du matériau supposé homogène et isotrope

G Module de glissement

ν Coefficient de Poisson

Dx , Dy , D_1 , Dxy Rigidités de la plaque orthotrope

Dimensions de la plaque et du raidisseur



h - épaisseur de la plaque

H - hauteur totale raidisseur-plaque

t - largeur du raidisseur

a - largeur de l'aile supérieure

$D = \dfrac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ Rigidité à la flexion d'un élément de plaque isotrope de hauteur h et de largeur unité

m nombre entier

q charge unifroemément répartie sur la plaque par unité de surface

ω flèche de la plaque dans la direction z

I^* Moment d'inertie du raidisseur de hauteur H par rapport à son centre de gravité

I Moment d'inertie du raidisseur de hauteur (H - h) par rapport à son centre de gravité

$$\alpha = \frac{h}{H}$$

$$\beta_m = \frac{m \pi a}{2 l}$$

$$\gamma = \frac{a}{t}$$

$$\lambda = \frac{E I^*}{l D}$$

l longueur entre appuis simples

INTRODUCTION

-:-:-:-

I.1.1 - GENERALITES

Les plaques planes sont généralement utilisées comme surfaces couvrantes et portantes. Dans un très grand nombre de cas, leurs rigidités à la flexion s'avèrent insuffisantes et il convient, pour les utiliser, d'augmenter ces rigidités dans une ou plusieurs directions.

Le système ainsi obtenu est anisotrope, dans le cas général, ou orthotrope lorsque l'augmentation de rigidité n'est effectuée que dans une seule direction ou deux directions perpendiculaires entre elles.

Cette recherche porte essentiellement sur l'étude des plaques minces renforcées par des raidisseurs placés parallèlement à l'un des côtés de la plaque, et elle a pour but :

- de déterminer pour un état de chargement donné et pour des conditions aux limites imposées sur le contour de la plaque, le dimensionnement relatif de la plaque et des raidisseurs permettant d'obtenir un poids de matière minimum pour une flèche ou une contrainte limite, fixée à priori.

- de calculer la flèche et la contrainte maximum en chaque point de la plaque ainsi obtenue.

Deux cas de chargement sont envisagés, soit une pression uniforme q, soit une pression variant linéairement de 0 à q d'un bord à l'autre de la plaque, dans la direction des raidisseurs (pression hydrostatique).

La longueur totale de la plaque dans la direction perpendiculaire aux raidisseurs est supposée grande par rapport à l'intervalle séparant deux raidisseurs. On admet en outre, par hypothèse, que les quatre côtés de la plaque reposent sur des appuis simples.

Compte tenu de ces hypothèses, les conditions aux limites pour les éléments de plaque compris entre deux raidisseurs, et suffisamment éloignés des appuis seront :

deux côtés parallèles sur appuis simples et les deux autres encastrés sur des raidisseurs pouvant travailler en flexion, mais non en torsion.

Cette dernière condition (pas de torsion des raidisseurs), qui ne reflète pas exactement la réalité dans le cas des grandes flèches, ne permet pas d'utiliser d'une manière satisfaisante les méthodes de calculs faisant intervenir simultanément les contraintes de flexion et les contraintes de membrane. Certains auteurs, comme il est indiqué dans la note bibliographique, ont été conduits, pour les adopter, à linéariser les équations fondamentales d'équilibre des plaques.

Quand on néglige la torsion, la méthode de calcul retenue consiste à

déterminer séparément les charges équilibrées par les contraintes de flexion et les contraintes de membrane.

Les flèches dûes uniquement à la flexion de la plaque sont obtenues en complètant une solution de la forme proposée par M. LEVY, par une fonction satisfaisant aux conditions aux limites. Les secondes sont calculées à partir des méthodes de l'énergie potentielle (termes non linéaires).

Les charges équilibrées par les contraintes de flexion et les contraintes de membrane étant respectivement déterminées, la charge totale est obtenue par superposition des précédentes, ceci pour chaque valeur de la flèche .

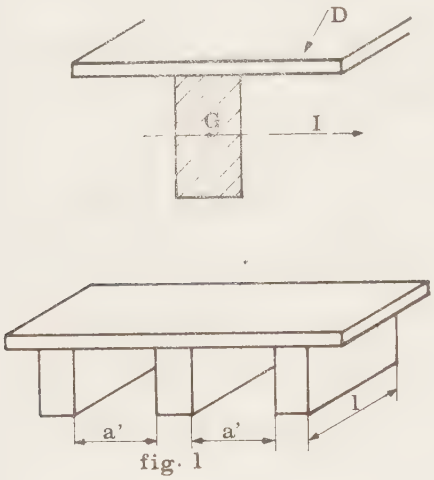


fig. 1

Chaque plaque peut être caractérisée par deux paramètres sans dimension définissant :

le premier $\lambda = \frac{EI}{lD}$

la rigidité relative en flexion d'un raidisseur par rapport à celle de la plaque

le second $\beta = \frac{\pi a'}{2l}$

le rapport de la largeur d'un élément de plaque compris entre deux raidisseurs à la longueur entre appuis.

Le Centre de calculs de l'E.N.S.M. nous a donné la possibilité de déterminer les coefficients permettant d'obtenir les flèches au centre de l'élément, et les contraintes en chaque point pour 10 valeurs de λ comprises entre 1 et 10^4 et 12 valeurs de β .

1.1.2 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES DES PLAQUES -

1.1.2.1 - Flexion des plaques minces - Equation de LAGRANGE

Considérons une plaque soumise à une flexion pure sur les côtés parallèles aux axes x et y

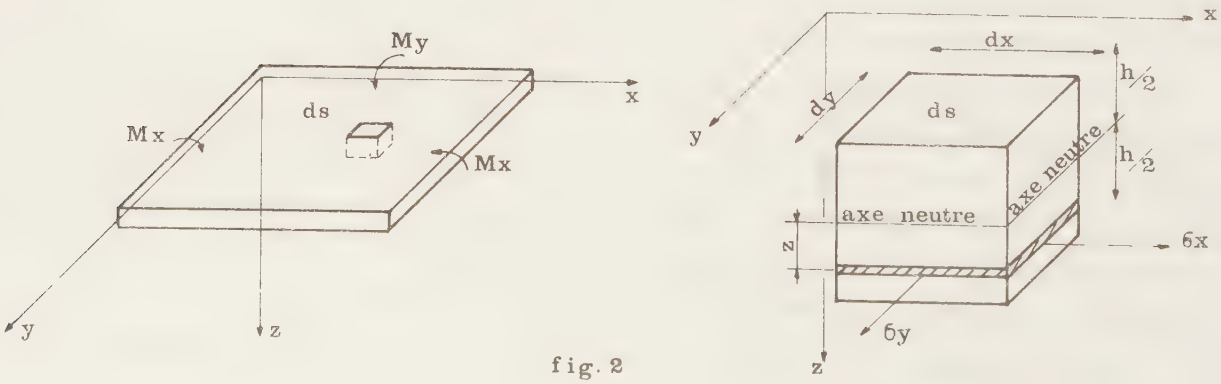


fig. 2

Dans l'hypothèse où les côtés latéraux d'un élément de cette plaque restent plans au cours des déformations, et tournent aurour des axes neutres, les contraintes normales σx et σy s'exerçant sur les côtes de la surface élémentaire dx dy située à la distance z de la surface neutre, sont proportionnelles à la distance z.

Ces contraintes normales distribuées sur les côtes latéraux sont équivalentes à deux couples dont les valeurs par unité de longueur sont :

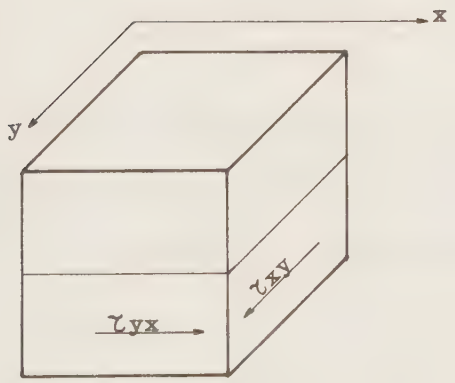
$$Mx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \, dz$$

$$My = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \, dz$$

En exprimant σx et σy en fonction des rayons de courbure et ces derniers en fonction de la flèche de la plaque, on obtient :

$$Mx = - D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \qquad (1)$$

$$My = - D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$



Considérons un élément sur lequel s'exerce des contraintes de cisaillement.

Le théorème de réciprocité montre que :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

En écrivant l'équivalence des contraintes de cisaillement et du couple s'exerçant sur les côtés de l'élément, on obtitnt :

$$Mxy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \, dz$$

soit en xeprimant les contraintes en fonction de la déformée, il vient :

$$Mxy = - Myx = D (1 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

Dans le cas général, un élément de plaque est soumis sur ses côtés à des moments de torsion, des moments de flexion et des forces de cisaillement Qx et Qy.

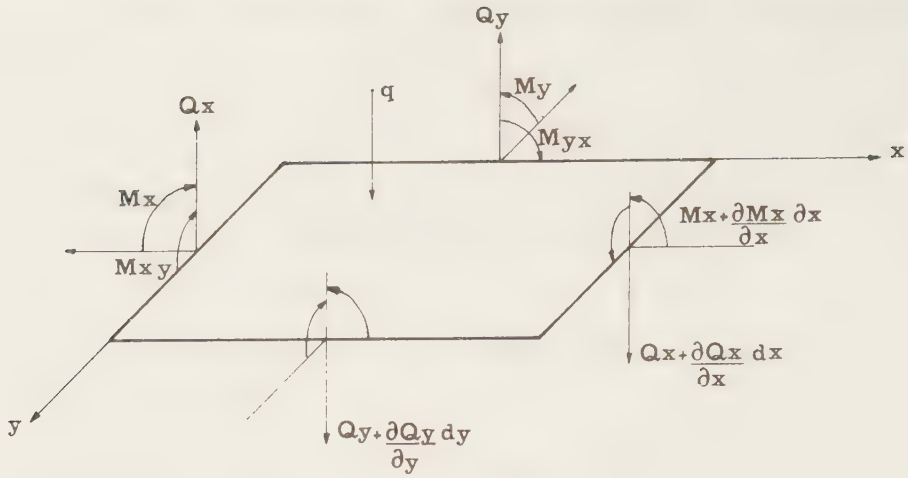


fig 3

L'équilibre de cet élément, lorsqu'une pression uniforme est appliquée normalement à la surface dx dy , s'exprime par la relation :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} = -\,q$$

et en remplaçant Mx My et Mxy en fonction des valeurs précédemment établies, nous obtenons :

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \qquad (2)$$

soit : $\Delta\Delta\omega = \frac{q}{D}$ (équation de LAGRANGE)

1.1.2.2 - Plaque orthotrope

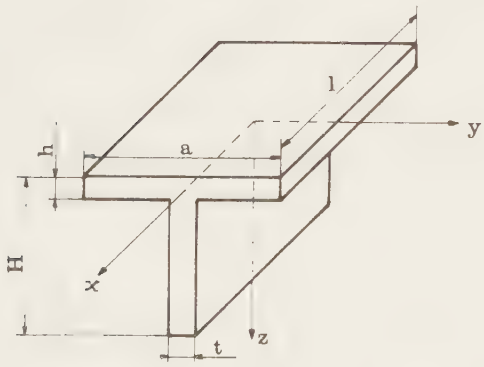


fig 4

Considérons une plaque renforcée par une série de raidisseurs, de façon telle qu'elle présente deux axes de symétrie orthogonaux, que nous prendrons comme axes de coordonnées.

Supposons en outre, que les rigidités de la plaque suivant ces deux directions soient différentes (Fig. 4).

Les relations entre les composantes de la contrainte située dans le plan de la plaque et les déformations s'écrivent :

$$\sigma_x = E'_x\,\varepsilon_x + E''\,\varepsilon_y$$

$$\sigma_y = E'_y\,\varepsilon_y + E''\,\varepsilon_x$$

$$\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy}$$

E'x et E'y représentant les modules d'élasticité dans les directions x et y.

E" traduisant l'influence de l'effet de Poisson.

Notons que, dans le cas particulier d'une plaque isotrope, ces différents coefficients ont pour valeur :

$$E' = E' = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad E'' = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \qquad G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

Dans l'hypothèse où les facettes perpendiculaires au plan moyen xy de la plaque restent planes et normales à la surface fléchie, on peut utiliser les expressions :

$$\varepsilon_x = -z\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \qquad \varepsilon_y = -z\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \qquad \gamma_{xy} = -2\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} \tag{4}$$

Les expressions (3) permettent de déterminer les composantes de la contrainte et d'en déduire les valeurs des moments de flexion et de torsion

$$\begin{aligned} M_x &= -\left[D_x\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + D_1\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -\left[D_y\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + D_1\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -\,2\,D_{xy}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} \end{aligned} \tag{5}$$

avec :

$$D_x = \frac{E'_x\,h^3}{12} \qquad D_y = \frac{E'_y\,h^3}{12} \qquad D_1 = \frac{E''\,h^3}{12} \qquad D_{xy} = \frac{G\,h^3}{12} \tag{6}$$

En reportant les valeurs (5) dans l'équation définissant l'équilibre d'un élément de plaque, on obtient l'équation différentielle de la plaque fléchie

$$D_x\,\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\,(D_1 + 2\,D_{xy})\,\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2\,\partial y^2} + D_y\,\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = q \tag{7}$$

L'intégration de cette équation nécessite la détermination préalable des différentes rigidités de la plaque renforcée par les raidisseurs.

La détermination de ces rigidités fera l'objet d'un prochain paragraphe.

1.1.2.3 - Cas des grandes flèches - Equations de VON KARMAN

Lorsque des forces dans le plan moyen de la plaque viennent s'ajouter aux charges transversales, l'équation de LAGRANGE, précédemment citée, s'écrit :

$$\Delta\Delta\omega = \frac{1}{D}\left[q + N_x\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_y\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2\,N_{xy}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} \right] \tag{8}$$

N_x , N_y , N_{xy} représentant les forces s'exerçant par unité de longueur sur les

côtés d'un élément de plaque d'épaisseur h .

Les équations d'équilibre de l'élément s'écrivent dans le plan xy :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (9)$$

La quatrième équation permettent de calculer les inconnues ω, N_x, N_y, N_{xy}, s'obtient en considérant la déformation de la surface moyenne de la plaque

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \qquad (10)$$

avec :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{hE}\left(N_x - \nu N_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{hE}\left(N_y - \nu N_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{hG}\, N_{xy} \qquad (11)$$

En introduisant, pour résoudre ce système d'équations, la fonction de contrainte F (x y) telle que :

$$N_x = h\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad N_y = h\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad N_{xy} = -h\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad (12)$$

on note que les équations (9) sont identiquement satisfaites, tandis que les équations (8) et (10) s'écrivent :

$$\Delta\Delta F = E\left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right]$$

$$\Delta\Delta \omega = \frac{h}{D}\left(\frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right) \qquad (13)$$

équations de VON KARMAN.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CONNAISSANCES ACTUELLES

SUR LE COMPORTEMENT DES PLAQUES ORTHOTROPES DANS LE DOMAINE ELASTIQUE

- : - : - : - : - : -

1.2.1 - METHODES DE CALCUL DES PLAQUES ORTHOTROPES

L'anisotropie d'une plaque orthotrope peut être consécutive à la constitution du matériau qui forme la plaque, ou à la forme géométrique attribuée à la plaque, ou à un renforcement de la rigidité dans une direction donnée par un ou plusieurs raidisseurs.

Dans ce dernier cas, l'étude théorique peut s'effectuer par deux méthodes différentes.

Si l'épaisseur de la plaque est suffisamment grande pour pouvoir négliger les déformations propres de l'élément de plaque compris entre deux raidisseurs, ce qui est le cas en particulier des dalles en béton ou des plaques épaisses nervurées, l'étude s'effectue en déterminant théoriquement ou expérimentalement les rigidités en flexion et en torsion de la plaque orthotrope et en appliquant la formule du paragraphe précédent

$$D_x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\left(D_1 + 2D_{xy}\right)\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = q$$

Si les déformations propres de l'élément de plaque compris entre deux raidisseurs ne sont plus négligeables, ce qui est le cas des plaques très minces renforcées par des raidisseurs longitudinaux suffisamment éloignés les uns des autres, l'étude théorique peut s'effectuer en étudiant le comportement de cette portion de plaque soumise aux charges imposées, avec différentes conditions aux limites sur ses quatre côtés. (Appuis ou encastrements fixes ou élastiques).

Pour la région du plan comprise entre les raidisseurs, les flèches doivent satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^2} = \frac{q}{D}$$

La première méthode correspond à celle utilisée pour les deux premiers cas d'anisotropie cités en tête de ce paragraphe.

1.2.2.- TRAVAUX RELATIFS A LA METHODE DES RIGIDITES EQUIVALENTES (sans effet de membrane)

De très nombreux travaux, tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental, ont été effectués pour étudier le comportement des plaques orthotropes.

Cependant, le but des recherches entreprises étant principalement orienté vers l'étude des plaques très minces, le présent paragraphe ne comporte qu'un développement sommaire des recherches se rapportant à ces méthodes de calcul.

Nous pouvons rappeler les travaux de J. BOUSSINESQ (3) relatifs au cas d'une plaque de matière anisotrope, ceux de S.G. LECHNITZKY (27) sur les plaques orthotropes et de K. GIRKMANN (15) sur l'influence du cisaillement transversal dans le cas de l'anisotropie.

Les dalles de béton armé considérées comme des plaques orthotropes ont été étudiées par M.T. HUBER (20) et plus récemment par Y. GUYON, R. BARES et C. MASSONET(2)

Dans leurs travaux récents, TADAHIKO KAWAI (25) étudient le comportement des plaques orthotropes en fonction des différents cas de chargement et des diverses conditions limites sur le contour, et Z. MAZURKIEWICZ (33) superpose aux charges transversales des charges situées dans le plan moyen des plaques.

Pour les plaques renforcées par des raidisseurs longitudinaux, l'application de la formule (7)nécessite la détermination préalable des rigidités équivalentes du système anisotrope formé par la plaque et les raidisseurs. Dans le cas particulier où les raidisseurs sont placés symétriquement par rapport au plan moyen de la plaque, ces rigidités équivalentes ont été déterminées théoriquement par N.J. HUFFINGTON (21).

Parmi les nombreux travaux expérimentaux effectués dans le but de déterminer les rigidités des plaques renforcées, rappelons ceux de W. HOPPMANN (19) et N.J. HUFFINGTON.

La résistance de cloisons en tôles ondulées à plis verticaux et en tôles planes renforcées, a également été étudiée par H.E. JAEGER et P.A. VAN KATWIJK.(22).

1.2.3 - TRAVAUX SE RAPPORTANT AU CALCUL DES PLAQUES TRES MINCES AVEC RAIDISSEURS

Les études théoriques des plaques minces renforcées par des raidisseurs, sont basées sur la détermination de la déformée du plan moyen de la plaque sous l'action des charges extérieures.

1.2.3.1 - Dans l'hypothèse où les déformations restent petites par rapport à l'épaisseur de la plaque, les flèches doivent vérifier l'équation différentielle

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}$$

q représentant la charge appliquée par unité de surface.

Dans ce cas, les flèches seront déterminées en adaptant la solution générale de cette équation aux différentes conditions aux limites imposées à la plaque sur son contour.

En particulier, une de ces conditions fait intervenir la flexion et quel-

quefois la torsion des raidisseurs (cas des poutres de rive).

Une solution exacte en termes finis de l'équation différentielle n'est envisageable que pour un nombre de chargements simples, limités, et pour des conditions aux limites très simples.

Dans le cas général, on dispose d'un certain nombre de méthodes approchées dont les plus connues sont :

- La méthode des séries doubles de FOURIER - solution de NAVIER

La charge et les flèches sont prises sous la forme :

$$\left|\begin{matrix} q(x,y) \\ \omega(x,y) \end{matrix}\right| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\begin{matrix} a_{mn} \\ \omega_{mn} \end{matrix}\right| \sin\frac{m\pi x}{l} \sin\frac{n\pi y}{a}\, dx\, dy$$

Les coefficients a_{mn} dépendent de la charge, les coefficients ω_{mn} sont obtenus par les conditions aux limites.

- La méthode de M. LEVY

La solution générale de l'équation différentielle est prise sous la forme d'une série

$$\omega(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin\frac{m\pi x}{l}$$

ou $Y(y)$ est uniquement fonction de la variable y ; on adjoint à cette fonction une solution particulière dite fonction complémentaire satisfaisant aux différentes conditions aux limites.

Dans un certain nombre de cas, cette solution particulière correspond à la déformée d'une bande subissant un chargement identique à celui de la plaque.

Cette méthode a été utilisée par N.J. HUFFINGTON et BLACKBURG dans leurs études sur les plaques renforcées par des raidisseurs longitudinaux placés symétriquement par rapport au plan moyen de la plaque. Elle est également employée par BURN dans le cas d'une plaque raidie par deux poutres de rive infiniment rigides en torsion.

Notons également parmi les nombreux auteurs utilisant cette méthode S.J. FUCHS, qui donna une solution mathématique générale pour une plaque renforcée par des raidisseurs, en tenant compte de la torsion de ces derniers.

Une analyse de ces différentes méthodes est donnée par R. BARES et C. MASSONNET (2), dans leur ouvrage sur le calcul des dalles orthotropes. Différentes applications sont également données par S. TIMOSHENKO (46) dans son ouvrage : " Théorie des plaques et coques".

Dans une étude sur les plaques rectangulaires encastrées sur leurs quatre côtés et soumises à des pressions hydrostatiques,E.G. ODLEY (39) propose, pour la résolution de ce problème, une solution basée sur la méthode des séries, et une solution originale dûe à MARCUS (31).

MARCUS utilise des fonctions qui satisfont à priori à toutes les conditions

aux limites, et détermine, à l'aide de l'équation de LAGRANGE, une charge équivalente. La solution est obtenue en déterminant les différents termes d'une série convergente.

1. 2.3.2 - Pour les plaques très minces utilisées comme surfaces portantes, les flèches obtenues pour l'élément de plaque compris entre deux raidisseurs peuvent atteindre des valeurs du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la plaque.

Les théories des plaques pour les grandes flèches tiennent compte des déformations du plan moyen de la plaque.

A l'état de contraintes dû à la flexion, se superposent des contraintes normales et tangentielles, qui, pour un élément infiniment petit de la plaque, restent constantes sur toute l'épaisseur.

Ces contraintes, appelées contraintes de membrane, peuvent s'exprimer en introduisant une fonction de contrainte F , par les relations :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad \sigma_{xy} = \frac{-\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

L'équilibre de la plaque se traduit pour les grandes flèches par les équations de VON KARMAN

$$\Delta\Delta F = E\left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right]$$

$$\Delta\Delta \omega = \frac{h}{D}\left(\frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)$$

La résolution exacte de ce système d'équation est très complexe en raison de la non linéarité des équations.

Dans une récente publication K.T. SUNDARA RAJA IYENGAR et MATIN NAQVI, étudient le fléchissement des plaques minces rectangulaires, en considérant des grandes flèches avec diverses conditions aux limites. La solution est obtenue en utilisant pour les fonctions F et ω des séries doubles de la forme

$$F = \sum_m \sum_n f_{mn}\, X_m(x) \cdot Y_n(y)$$

$$\omega = \sum_p \sum_q \omega_{pq}\, \phi_p(x) \cdot \psi_q(y)$$

Les équations différentielles sont satisfaites en utilisant les propriétés d'orthogonalité des séries.

Le comportement des plaques minces peut être étudié en superposant à la théorie linéaire des plaques en flexion les termes non linéaires provenant des contraintes de membrane. Ces derniers étant déterminés par les méthodes de l'énergie.

Z. HASHIN (16) dans une étude sur une plaque rectangulaire raidie par deux poulies de rive, montre qu'il est possible, en première approximation de négliger les

termes non linéaires des équations différentielles. La fonction de contrainte F étant alors uniquement exprimée dans les équations imposées par les conditions aux limites. Les résultats expérimentaux obtenus par l'auteur confirment cette hypothèse.

COMPLEMENTS PERSONNELS SUR LES THEORIES PRECEDENTES

- : - : - : -

1.3.1 - DETERMINATION DES RIGIDITES EQUIVALENTES D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE

Introduction :

La résolution de l'équation différentielle de la surface fléchie d'une plaque orthotrope :

$$D_x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\left(D_1 + 2D_{xy}\right)\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = q$$

impose la détermination préalable des différentes rigidités équivalentes D_x, D_y, D_{xy}, et D_1 de cette plaque.

Ces rigidités dépendent de la forme géométrique et de la disposition des raidisseurs. La détermination de chacune d'elles peut s'effectuer expérimentalement ou par l'emploi de formules théoriques ou empiriques.

Afin d'étudier l'influence respective des différents éléments de l'ensemble plaque - raidisseurs, nous avons déterminé dans ce chapitre, les rigidités équivalentes, en négligeant l'effet de membrane dans la plaque, ce qui permet d'appliquer le principe de superposition, et en admettant que les rigidités soient indépendantes du mode de chargement.

Le principe de calcul retenu, traduit l'égalité des énergies internes dans la plaque orthotrope et dans la plaque équivalente, lorsque les flèches sont égales.

1.3.1.1 - Détermination de Dx

1.3.1.1.1 - Principe

La plaque renforcée par des raidisseurs parallèles à l'axe des x repose sur deux appuis simples de coordonnées

$$x = \pm \frac{l}{2}$$

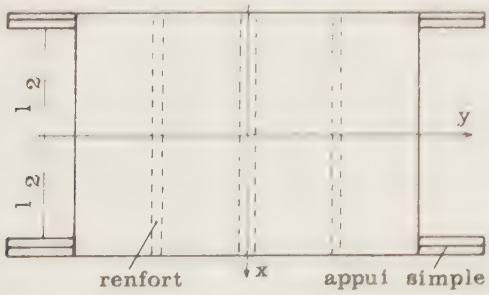


fig. 5

La géométrie de la plaque étant répétitive pour chaque tronçon de largeur a,

le calcul suivant se rapporte au comportement des deux parties de la plaque de largeur $\frac{a-t}{2}$ situées de part et d'autre du raidisseur.

Pour chacune de ces parties, il est possible de déterminer la répartition des moments de flexion à appliquer sur les différents côtés, telle que la flexion soit circulaire (les génératrices du cylindre étant parallèles à l'axe des y).

Pour cet état de chargement, on détermine l'énergie interne enmagasinée par ces deux plaques.

On applique au raidisseur un moment de flexion de manière à ce que la flèche prise par ce raidisseur, soit identique à celle de la plaque (pour x = 0), ce qui détermine une énergie interne correspondante.

La rigidité de la plaque équivalente sera obtenue en imposant à cette plaque une flexion circulaire donnant une flèche au centre identique aux précédentes, et telle que l'énergie interne soit égale à la somme des énergies précédemment citées.

1.3.1.1.2 - Energie interne dans les plaques

Dans le cas d'une plaque isotrope soumise à une flexion pure, les moments de flexion sont donnés par les expressions :

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)$$

si nous imposons une déformée cylindrique

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = 0 \text{ ainsi } \left| \begin{array}{l} M_x = M \\ M_y = \nu M \end{array} \right. \quad \text{avec ;} \quad M = -D\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} \qquad (14)$$

M désignant le moment appliqué sur les côtés parallèles à l'axe des y par unité de longueur.

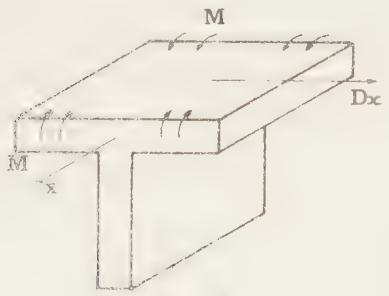


fig. 6

L'énergie interne ayant pour expression:

$$dV_1 = -\frac{1}{2}\left[M_x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right]dx\,dy$$

s'écrit, en tenant compte de (14)

$$dV_1 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{D}dx\,dy$$

Les plaques étant soumises à une flexion pure, nous aurons pour l'ensemble

$$V_1 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{D}\,l\,(a-t) \qquad (15)$$

La flèche maximum ayant pour valeur dans ce cas particulier :

$$\omega_{1\,max} = \frac{M\,l^2}{8\,D} \qquad (16)$$

1.3.1.1.3 - Energie interne dans un raidisseur

L'énergie interne dans le raidisseur soumis à l'action d'un moment de flexion M' sera :

$$V_2 = \frac{1}{2}\,\frac{M'^2 l}{EI^*} \qquad (17)$$

et la flèche au centre :

$$\omega_{2\,max} = \frac{M' l^2}{8EI^*} \qquad (18)$$

L'égalité des flèches conduit à la relation :

$$M' = M\,\frac{EI^*}{D} \qquad (19)$$

1.3.1.1.4 - Détermination de la rigidité de la plaque équivalente

L'énergie interne totale emmagasinée dans les plaques et le raidisseur a pour valeur :

$$V_1 + V_2 = \frac{M^2 l}{2D}\left[(a-t) + \frac{EI^*}{D}\right]$$

que nous pouvons exprimer en fonction des flèches maxima (16)

$$V_1 + V_2 = \left(\frac{8D\,\omega_{1\,max}}{l^2}\right)^2 \frac{l}{2D}\left[(a-t) - \frac{EI^*}{D}\right] \qquad (20)$$

En imposant à la plaque équivalente une flèche identique aux précédentes, nous obtenons (15) et (16)

$$V = \left(\frac{8D_x\,\omega_{1\,max}}{l^2}\right)^2 \frac{la}{2D_x} \qquad (21)$$

l'égalité des énergies internes conduit pour D_x à la valeur :

$$D_x = \frac{(a-t)D + EI^*}{a} \qquad (22)$$

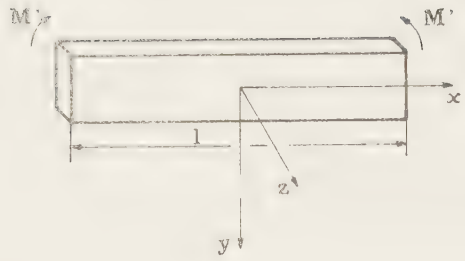
NOTA - Cette expression de D_x a été obtenue par une méthode de calcul différente par N.J. HUFFINGTON comme valeur asymptotique lorsque la distance l, entre les appuis simples sur lesquels reposent la plaque, croît.

Des applications numériques effectuées par l'auteur précité montrent que cette valeur est rapidement atteinte.

Dans le paragraphe suivant, nous montrerons que cette valeur de D doit être modifiée, pour tenir compte de l'intéraction plaque-raidisseur.

Cette méthode ne respecte pas la continuité des déplacements sur l'interface raidisseur - plaque.

Au cours de la déformation, les côtés latéraux de la section droite du raidisseur vont tourner d'une quantité proportionnelle au moment M' (fig 7)



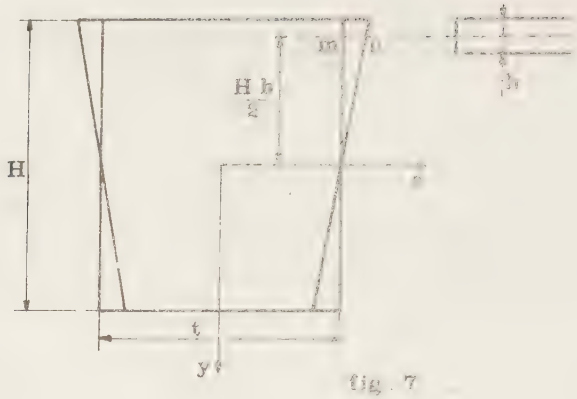


fig. 7

le côté $z = \frac{t}{2}$ devient après déformation :

$$z = \frac{t}{2} - \frac{\nu}{R} \cdot \frac{t}{2} y \qquad \text{avec :} \qquad \frac{1}{R} = \frac{M'}{EI^*}$$

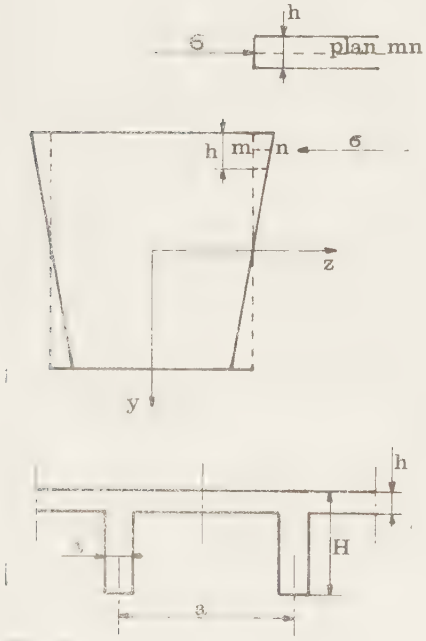
le déplacement moyen m n correspondant au plan médian de la plaque d'ordonnée

$y = -\left(\frac{H-h}{2}\right)$, a pour valeur :

$$m\,n = \frac{\nu}{R} \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{H-h}{2}$$

Le déplacement des côtés latéraux va faire apparaitre, sur l'interface plaque-raidisseur, des contraintes de compression qui seront proportionnelles à l'allongement relatif de chaque fibre de longueur initiale t (ordonnée y).

Dans notre calcul, nous avons considéré la valeur moyenne m n du déplacement, et nous supposons que la contrainte correspondant à ce déplacement était appliquée sur toute la hauteur h.



Déterminons la contrainte σ permettant d'assurer, après déformation, la continuité des déplacements.

Cette contrainte appliquée sur l'interface plaque-raidisseur, donne des déplacements relatifs ayant pour valeur :

pour le raidisseur :

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \qquad \text{soit} \quad \Delta \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \frac{\sigma}{E}$$

pour la plaque :

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta\left(\frac{a-t}{2}\right)}{\frac{a-t}{2}}$$

soit

$$\Delta \frac{a-t}{2} = \frac{a-t}{2} \cdot \frac{\sigma}{E}$$

La continuité des déplacements s'écrit :

$$\Delta \frac{t}{2} + \Delta \frac{a-t}{2} = \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{H-h}{2}$$

soit en remplaçant chaque terme du premier membre par sa valeur exprimée en fonction de la contrainte

il vient : $$\sigma = \frac{E\lambda}{R} \cdot \frac{H-h}{2} \frac{t}{a}$$

L'énergie interne par unité de volume dûe à la contrainte σ a pour valeur :

$$dW = \frac{1}{2E} \sigma^2$$

soit $$dW = \frac{1}{2} \frac{E\lambda^2}{R^2} \cdot \left(\frac{H-h}{2}\right)^2 \left(\frac{t}{a}\right)^2$$

et l'énergie totale : $$W = dW \left[l t h + l (a-t) h \right]$$

soit . $$W = dW \cdot l a h$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \frac{E\lambda^2}{R^2} \left(\frac{H-h}{2}\right)^2 \left(\frac{t}{a}\right)^2 l a h$$

sachant que $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI^*}$ et $\frac{M'}{EI^*} = \frac{M}{D}$

il vient $$W = \frac{M^2 l}{2D} \left[\frac{E\lambda^2 (H-h)^2 t^2 h}{4Da} \right]$$

L'énergie totale dûe à la déformation du raidisseur, à celle de la plaque et à la condition de continuité des déplacements, a pour valeur : $V_1 + V_2 + W$

Un calcul analogue à celui effectué précédemment, donne pour la valeur de la rigidité équivalente :

$$D_x = \frac{D}{a} \left[(a-t) + \frac{EI^*}{D} + \frac{E\lambda^2 (H-h)^2 t^2 h}{4Da} \right] \qquad (23)$$

1.3.1.1.5 - <u>Influence des forces de cisaillement</u>

1.3.1.1.5.1 - <u>Définition</u>

Dans le calcul précédent, nous avons considéré les déformations de la plaque et du raidisseur comme indépendantes. Ce cas correspond à celui où la plaque peut coulisser longitudinalement par rapport au raidisseur.

En fait, plaque et raidisseur, sont reliés mécaniquement, soit parce qu'ils font partie d'un même ensemble (usinés dans la masse du matériau), soit parce qu'ils sont soudés l'un à l'autre.

Il est donc nécessaire de tenir compte de l'interaction de la plaque et du raidisseur. Cette interaction prend effet dans les sections m n au droit des raidisseurs et se traduit lorsque la flexion est circulaire, par une contrainte de cisaillement f située dans les plans m n . Cette contrainte traduit le fait que la fibre OO', commune à la plaque et au raidisseur, conserve lors de la flexion, une longueur constante pour la plaque (fibre neutre) et se raccourcit pour le raidisseur proportionnellement à la distance h'.

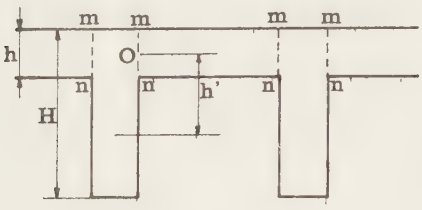


fig. 8

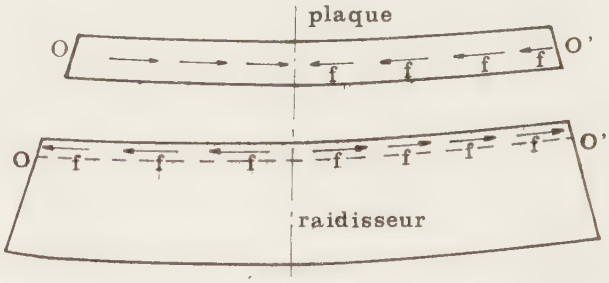


fig. 9

1.3.1.1.5.2 - <u>Influence des contraintes f sur le comportement du raidisseur</u>

Dans une section droite du raidisseur, située à une distance x de l'une des extrémités, le moment fléchissant a pour valeur, en tenant compte des contraintes f agissant sur chaque face m n :

$$\text{Moment} = M' - 2fhxh' \qquad (24)$$

Cette expression est établie en admettant que la contrainte f reste constante sur toute l'épaisseur h de la plaque. Elle sera donc essentiellement vérifiée pour les faibles épaisseurs.

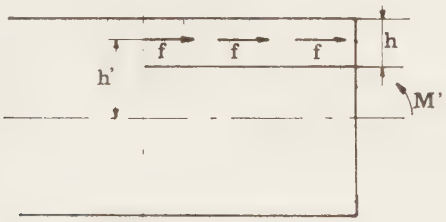


fig. 10

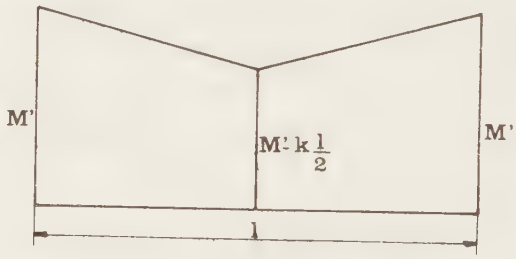


fig. 11

En posant : $$k = 2fhh' \qquad (25)$$

il vient : $$\text{Moment} = M' - kx$$

d'où le diagramme du moment fléchissant représenté sur la figure 11 . Un calcul analogue à celui des paragraphes précédents nous montre que la flèche au centre du raidisseur a pour valeur :

$$\omega_{2\,max} = \frac{M' l^2}{8EI^*} - \frac{k l^3}{48EI^*} \qquad (26)$$

La formule 26 montre que la flèche au centre diminue, donc que la raideur du raidisseur augmente sous l'action des contraintes f .

Afin d'évaluer cette augmentation de raideur, nous déterminerons dans le paragraphe suivant, la valeur moyenne de f .

1.3.1.1.5.3 - Détermination de la contrainte f

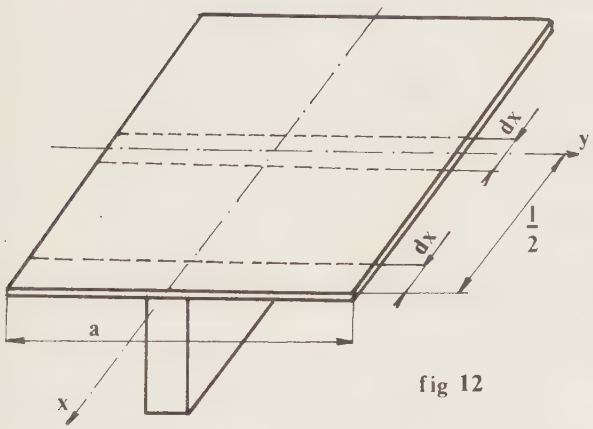


fig 12

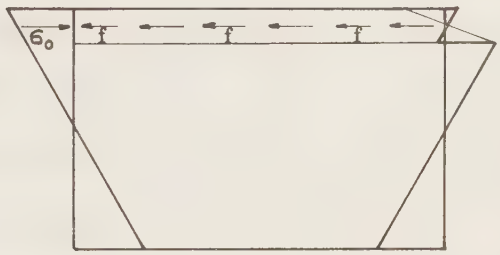


fig. 13

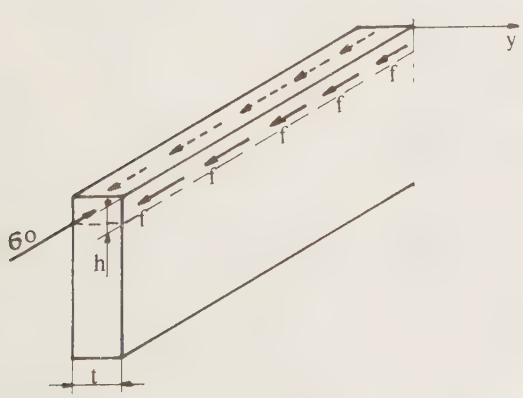
Ce calcul ne constitue qu'une détermination approximative de la contrainte f. On admet par hypothèse, que cette contrainte reste constante sur la surface limitée par l'épaisseur de la plaque et la longueur $\frac{l}{2}$. (Cette condition n'est pas vérifiée aux extrémités en vertu du théorème de réciprocité des cisaillements).

Considérons les contraintes agissant sur la fibre OO' (figure 9). A l'extrémité libre de la plaque (figure 12) la contrainte de compression agissant sur la fibre OO' du raidisseur est égale à σ_0 (proportionnelle au moment M' (24) pour x = 0). Sous l'action du moment de flexion, un élément dx de cette fibre va se raccourcir.

Au centre de la plaque, un élément dx de la fibre OO' du raidisseur conservera la même longueur que l'élément homologue appartenant à la plaque. Or cet élément est situé sur la fibre neutre de la plaque, et sa longueur reste inchangée lors de la flexion - (L'élément de plaque de largeur dx pouvant être considéré comme encastré sur chacun de ses côtés de longueur a).

La répartition des contraintes dans une section droite située au centre de la plaque sera donc représentée comme l'indique la figure 13.

En étudiant l'équilibre du raidisseur de longueur $\frac{l}{2}$, nous obtenons la relation :



$$\sigma_0 h t = 2 f . \frac{l}{2} . t$$

soit :

$$f = \sigma_0 \frac{t}{l} \qquad (27)$$

1.3.1.1.5.4 - Détermination de la rigidité Dx

La contrainte σ_0 peut s'exprimer en fonction du moment de flexion M' et de la distance h' séparant le centre de gravité du raidisseur de la fibre OO'

$$\sigma_0 = \frac{M' h'}{I} \tag{28}$$

d'où la valeur de f (27)

$$f = \frac{M' h' t}{I^* l}$$

en reportant cette valeur dans l'expression (25), il vient :

$$k = \frac{2 M' h'^2 t h}{I^* l}$$

d'où l'expression de la flèche maximum au centre du raidisseur

$$\omega_{2\,max} = \frac{M' l^2}{8 E I} - \frac{2 M' h'^2 t h l^2}{48 E I^{*2}}$$

en remplaçant I^* et. h' par leurs valeurs

$$I^* = \frac{t H^3}{12} \qquad h' = \frac{H-h}{2}$$

nous obtenons :

$$\omega_{2\,max} = \frac{M' l^2}{8 E I^*} \left[1 - \frac{(H-h)^2 h}{H^3} \right] \tag{29}$$

La formule (29) montre que la contrainte f augmente la rigidité du raidisseur, la nouvelle rigidité ayant pour valeur :

$$K = E I^* \frac{H^3}{H^3 - (H-h)^2 h} \tag{30}$$

posons : $\alpha = \frac{h}{H}$

il vient

$$K = E I^* \frac{1}{1 - \alpha (1-\alpha)^2}$$

Un calcul analogue à celui du paragraphe (1.3.1.1.4) conduit au résultat

$$D_x = \frac{a-t}{a} D + \frac{1}{1 - \alpha (1-\alpha)^2} \frac{E I^*}{a} \tag{31}$$

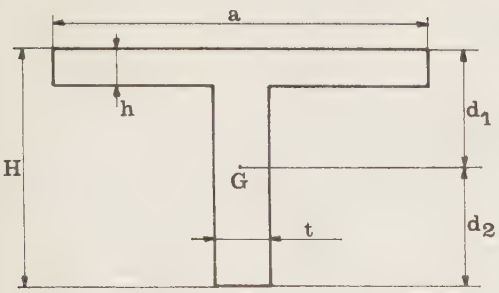
Cette valeur de la rigidité Dx est identique à celle donnée par la formule (22) pour les valeurs particulières de

$$\alpha = 0 \qquad \alpha = 1$$

elle est toujours supérieure à la précédente pour $0 < \alpha < 1$

1.3.1.1.6 - Etude comparative des différentes valeurs de rigidité

1.3.1.1.6.1 - Expressions des différentes rigidités



$$D = \frac{EI_1}{a} \qquad (a)$$

où I représente l'inertie du T formé par le raidisseur et une largeur de plaque a , par rapport au centre de gravité G du T .

La formule (22) montre que la rigidité peut être prise sous la forme :

$$D_x = \frac{(a-t)D + EI^*}{a} \qquad (b)$$

Rappelons que cette valeur correspond à la valeur asymptotique déterminée par N.J. HUFFINGTON.

En tenant compte de la continuité des déplacements sur l'interface plaque-raidisseur, nous obtenons :

$$D_x = \frac{D}{a}\left[(a-t) + \frac{EI^*}{D} + \frac{E\nu^2 (H-h)^2 t^2 h}{4Da}\right] \qquad (c)$$

L'étude de l'influence des contraintes de cisaillement nous a montré que la rigidité équivalente de la plaque orthotrope avait pour valeur :

$$D_x = \frac{a-t}{a} D + \frac{1}{1-\alpha(1-\alpha)^2}\,\frac{EI^*}{a} \qquad (d)$$

avec : $\alpha = \frac{h}{H}$

1.3.1.1.6.2 - Etude comparative

Transformons l'équation (a) de manière à exprimer Dx en fonction des caractéristiques géométriques de la plaque et du raidisseur

en posant : $\alpha = \frac{h}{H}$ et $\gamma = \frac{a}{t}$

il vient pour l'expression de (a)

$$D_x = \frac{EH^3}{12} \cdot \frac{1 + (\gamma-1)^2\alpha^4 + 2(\gamma-1)\alpha(2\alpha^2+2-3\alpha)}{\gamma\left[1+(\gamma-1)\alpha\right]} \qquad (a')$$

Avec les mêmes notations, nous obtenons pour les expressions (b) et (c) :

(b) $$D_x = \frac{EH^3}{12}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{(\gamma-1)\alpha^3}{1-\nu^2} + 1\right)\right] \qquad (b')$$

(c) $$D_x = \frac{EH^3}{12} \cdot \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\gamma - 1}{1 - \nu^2} \alpha^3 + 1 + \frac{3\alpha \nu^2 (1-\alpha)^2}{\gamma} \right] \qquad (c')$$

(d) $$D_x = \frac{EH^3}{12} \cdot \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\gamma - 1}{1 - \nu^2} \alpha^3 + \frac{1}{1 - \alpha (1-\alpha)^2} \right] \qquad (d')$$

avec : $0 < \alpha < 1$ et $1 < \gamma < \infty$

Notons que les seconds termes de la parenthèse des équations c' et d' sont égaux à 1 pour les valeurs $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Les courbes représentatives correspondantes passeront par les mêmes points que la courbe définie par (b') pour ces valeurs particulières de .

Pour $\gamma = 10$, nous avons représenté sur le graphique n°14 les trois courbes représentatives des valeurs $D_x \frac{12}{EH^3}$ en fonction de α (compris entre 0 et 1) données par les expressions a' b' et d'.

1.3.1.1.6.3 - Conclusion

Dans l'expression (a') l'influence de la contraction transversale est négligée, les valeurs obtenues sont erronées par défaut au voisinage de $\alpha = 1$, et par excès pour $\alpha < \frac{1}{2}$

Les courbes représentant les expressions (d') et (b') sont extrêmement voisines l'une de l'autre. La courbe (d') correspond aux valeurs obtenues avec la formule plus exacte 31

Le terme correctif de l'expression (c')

$$\frac{3\alpha \nu^2 (1-\alpha)^2}{\gamma}$$

qui traduit la continuité des déplacements sur l'interface plaque-raidisseur est maximum pour la valeur particulière de

pour $\gamma = 10$, ce terme a pour valeur :

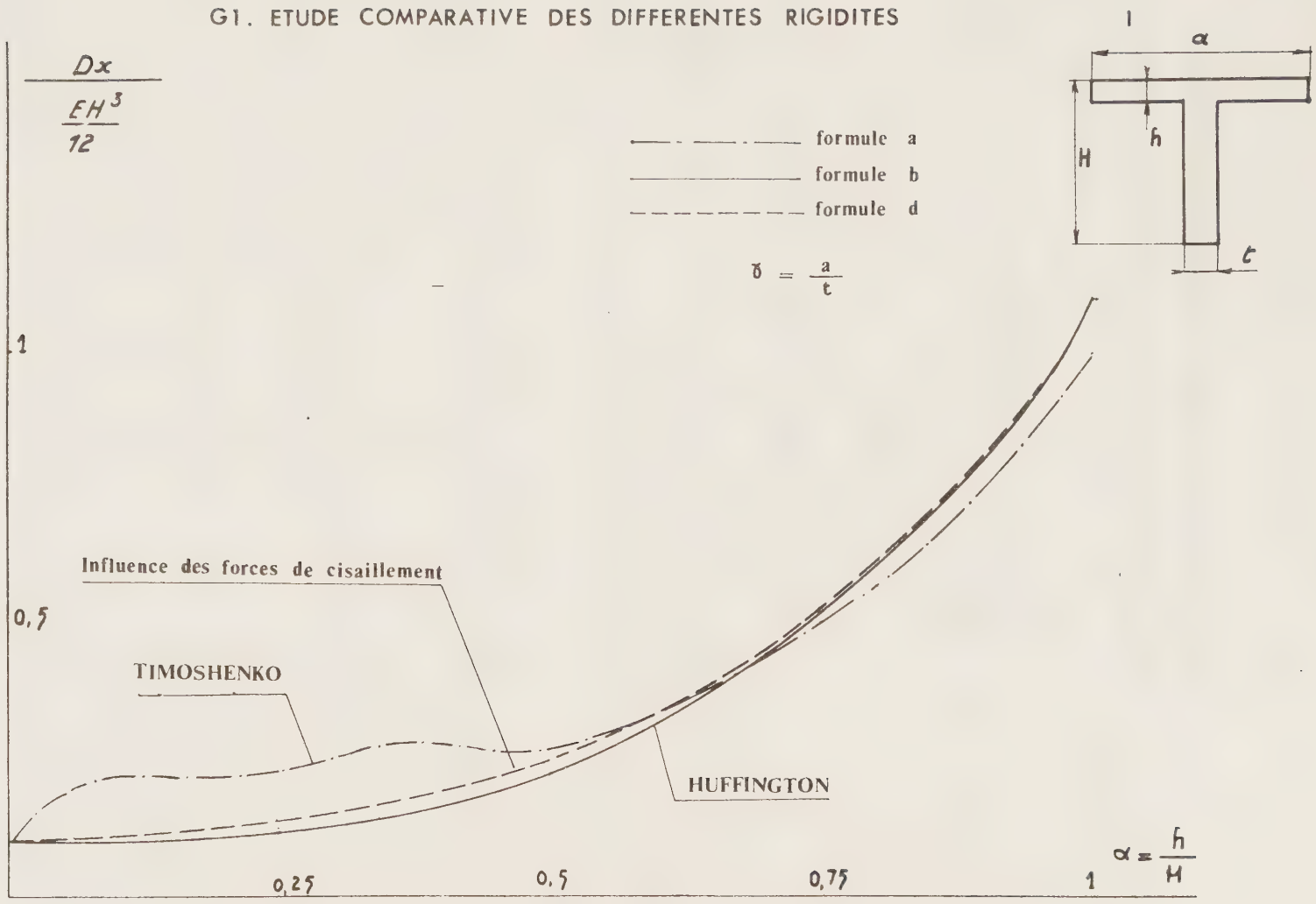
$$\frac{3\alpha \nu^2 (1-\alpha)^2}{\gamma} = \frac{4}{10^3}$$

Les deux courbes représentant les expressions b' et c' seront confondues pour ces valeurs de γ

1.3.1.2 - Détermination de Dy

La rigidité équivalente d'une plaque étant supposée indépendante du mode de chargement, la rigidité Dy sera déterminée en considérant la plaque renforcée posée sur deux appuis simples parallèles à l'axe longitudinal des raidisseurs et en étudiant

G1. ETUDE COMPARATIVE DES DIFFERENTES RIGIDITES



le comportement en flexion pure d'une bande de largeur unité découpée dans la plaque perpendiculairement aux appuis. Cette bande sera assimilée à une poutre d'inertie variable reposant sur deux appuis. En admettant comme critère d'équivalence l'égalité des flèches au centre, il devient possible de déterminer l'inertie équivalente de cette poutre, et d'en déduire la rigidité Dy de la plaque.

1.3.1.2.1 - Cas d'une plaque renforcée par deux raidisseurs

Considérons une plaque renforcée par deux raidisseurs identiques symétriques par rapport à l'axe

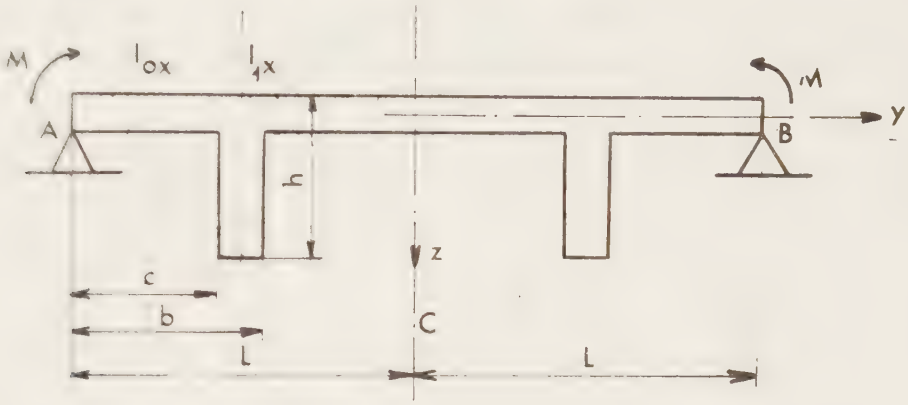


Fig 9

Designons par I_{ox} et I_{1x} les moments d'inertie des sections droites de la plaque et du raidisseur parallèles à l'axe des x

Dans la direction de l'axe y le diagramme $\frac{M}{EI}$ est représenté par le graphe ci-dessous

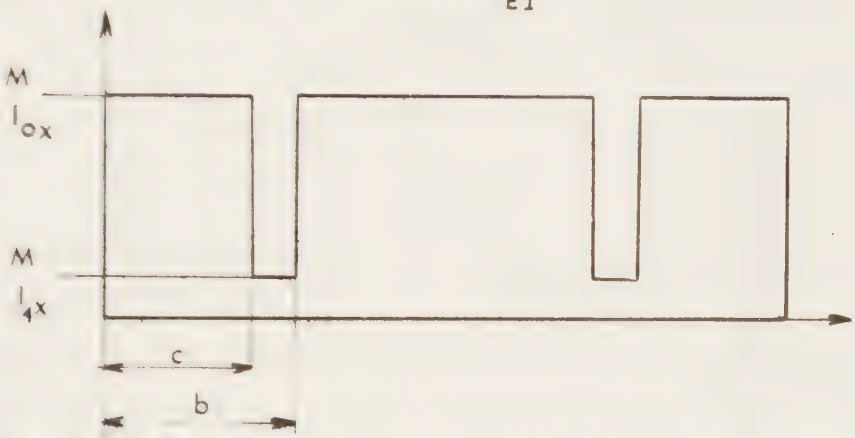


Fig 10

La rotation par rapport à un axe horizontal de la section plane située au droit de l'appui A est

$$\theta_A = \frac{ML}{EI_{ox}} - \left[\frac{M}{EI_{ox}} - \frac{M}{EI_{1x}} \right](b-c)$$

La flèche au centre de cette poutre s'écrit :

$$\omega_{max} = \theta_A . L - \int_A^C \frac{M}{EI} y\,dy$$

ce qui donne, tous calculs faits, et en utilisant la notation $\frac{I_{ox}}{I_{1x}} = \alpha^3$

$$\omega_{max} = \frac{M}{2EI_{ox}} \left[L^2 - (1-\alpha^3)(b^2-c^2) \right]$$

Pour la poutre équivalente d'inertie constante I^*_{ox} soumise au même état de chargement, la flèche au centre a pour valeur

$$\omega_{max} = \frac{ML^2}{2EI^*_{ox}}$$

En admettant comme critère d'équivalence l'égalité des flèches, ce qui correspond en première approximation et pour un même chargement, à prendre l'égalité des énergies internes, on obtient

$$I^*_{ox} = I_{ox} \frac{L^2}{L^2-(1-\alpha^3)(b^2-c^2)}$$

Pour une plaque d'épaisseur constante, la rigidité s'exprime par la relation

$$D_y = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E I^*_{ox}}{1-\nu^2}$$

ainsi

$$D_y = \frac{E I_{ox}}{1-\nu^2} \cdot \frac{L^2}{L^2-(1-\alpha^3)(b^2-c^2)}$$

La rigidité équivalente de la plaque renforcée est égale à la rigidité de la plaque sans renfort multipliée par un coefficient de majoration qui a pour valeur

$$\frac{L^2}{L^2-(1-\alpha^3)(b^2-c^2)}$$

1.3.1.2.2 - Cas d'une plaque renforcée par 2 n raidisseurs

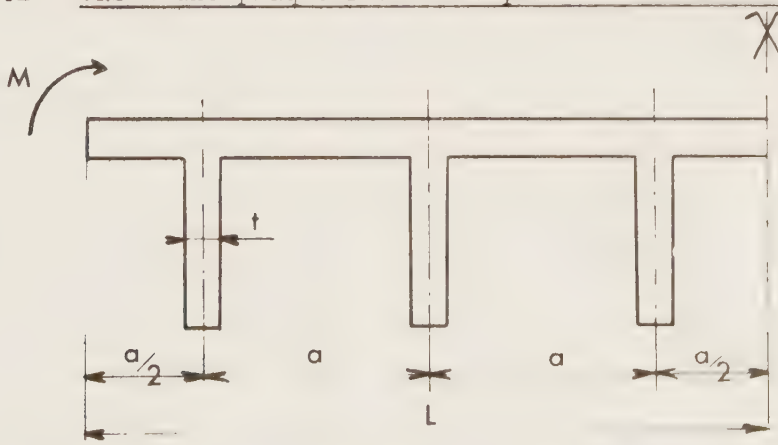


fig.17

Considérons une plaque renforcée par 2 n raidisseurs identiques, placés symétriquement par rapport à l'axe z, un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent conduit au résultat

$$\omega_{max} = \frac{M}{2EI_{ox}} \left[L^2 - \sum_0^n (1-\alpha^3)(b^2-c^2) \right]$$

avec

$$L = n.a$$

et $$b^2 - c^2 = (b-c)(b+c) = t(b+c)$$

l'expression $\frac{b+c}{2}$ ayant successivement pour valeur

$$\frac{a}{2}\ ,\ \frac{a}{2}+a\ ,\ \frac{a}{2}+2a \ \ldots\ldots\ \frac{a}{2}+(n-1)a$$

en reportant ces valeurs dans l'expression de la flèche, il vient :

$$\sum_0^n (1-\alpha^3)(b^2-c^2) = (1-\alpha^3)t\sum_0^n 2\left[\frac{a}{2} + \ldots\left(\frac{a}{2}+(n-1)a\right)\right]$$

soit : $$\sum_0^n (1-\alpha^3)(b^2-c^2) = 2(1-\alpha^3)ta\left[\frac{n}{2} + \sum_0^n 1+2+\ldots(n-1)\right]$$

et en remplaçant la somme des (n-1) premiers nombres entiers par $\frac{n(n-1)}{2}$ on obtient :

$$\sum_0^n (1-\alpha^3)(b^2-c^2) = (1-\alpha^3)\,t\cdot a\cdot n^2$$

d'où la valeur du coefficient correcteur

$$\frac{L^2}{L^2 - \sum(1-\alpha^3)(b^2-c^2)} = \frac{n^2a^2}{n^2a^2 - n^2at(1-\alpha^3)}$$

La rigidité équivalente de la plaque renforcée s'écrit alors :

$$D_y = \frac{EI_{ox}}{1-\nu^2}\,\frac{a}{a-t+t\alpha^3} \qquad (32)$$

1.3.1.3 - Détermination de Dxy

1.3.1.3.1 - Principe de calcul

Considérons un élément de la plaque renforcée, de largeur a, de longueur l, symétrique par rapport à l'axe du raidisseur.

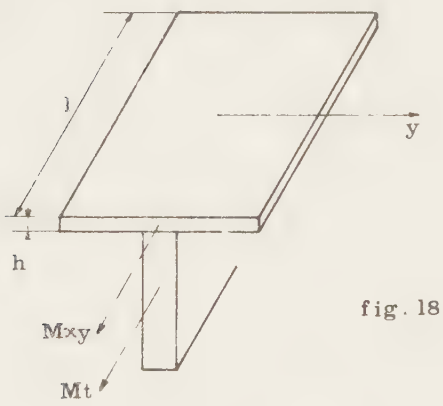


fig. 18

Sous l'action d'un moment de torsion appliqué sur les bords perpendiculaires à Ox, les sections droites de cet élément vont subir une rotation les unes par rapport aux autres, et à cette déformation correspond une certaine valeur de l'énergie interne.

La plaque équivalente sera définie comme étant la plaque d'épaisseur constante sans raidisseur, qui, soumise à un moment de torsion sur les côtés perpendiculaires à l'axe Ox, subit une déformation identique à la précédente lorsque les énergies internes sont égales.

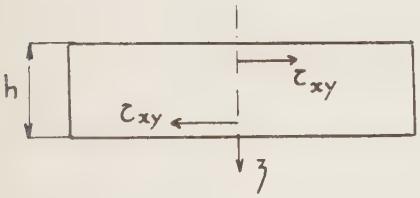
Pour déterminer les déformations et l'énergie interne de l'ensemble plaque-raidisseur, on isole virtuellement ces deux éléments, et on applique à chacun d'eux un

moment de torsion tel que les sections droites homologues subissent la même rotation, l'énergie interne de l'ensemble étant déterminée par la somme des énergies internes calculées séparément, lorsque la dernière condition est satisfaite.

1.3.1.3.2 - Etude d'une plaque en torsion

Pour une plaque d'épaisseur constante h , soumise à un moment de torsion Mxy par unité de longueur sur le côté parallèle à Oy, les déformations du plan moyen de la plaque sont données par la realtion :

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \, dz = D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \qquad (33)$$



Dans le cas particulier où les axes de coordonnées Ox et Oy sont situés dans le plan moyen de la plaque avant déformation, l'équation de ce plan, après application des charges, est déterminée à partir de l'équation (33)

$$\omega = \frac{M_{xy} \cdot xy}{D(1-\nu)} \qquad (34)$$

La rotation d'une section droite perpendiculaire à l'axe Ox , s'exprime en fonction de la flèche, par la relation :

$$\theta_1 = \frac{\omega(x.y)}{y}$$

soit en tenant compte de (34)

$$\theta_1 = \frac{M_{xy} \cdot x}{D(1-\nu)} \qquad (35)$$

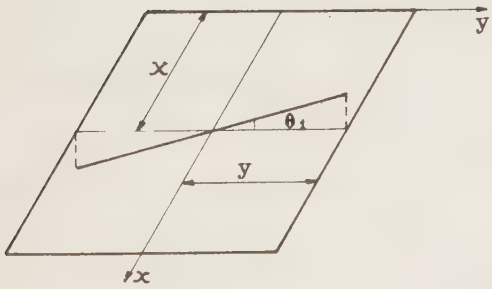


fig.19

Pour un élément dx dy , l'énergie interne dûe à l'application du moment Mxy , a pour valeur :

$$dV_1 = \frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \, dx dy$$

soit :

$$dV_1 = \frac{1}{2} \frac{M_{xy}^2}{D(1-\nu)} \, dx dy$$

Cette expression étant valable quel que soit l'élément considéré, nous avons pour l'ensemble de la plaque :

$$V_1 = \frac{1}{2} \frac{M_{xy}^2}{D(1-\nu)} a.l \qquad (36)$$

1.3.1.3.3 - Etude d'un raidisseur en torsion

Le raidisseur étant soumis à l'action d'un moment de torsion Mt la rotation relative de deux sections droites perpendiculaires à l'axe Ox et distantes de dx a pour valeur :

$$\frac{d\theta_2}{dx} = \frac{1}{GJ} M_t$$

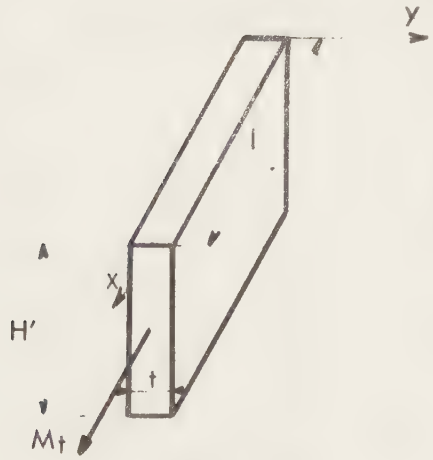


fig. 20

Dans le cas d'une section rectangulaire t et de hauteur H' , le coefficient GJ (rigidité à la torsion) s'exprime par la relation

$$\frac{1}{GJ} = \frac{1}{Gt^3H'} \left[3 + 4.1 \left(\frac{t}{H'}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

La rotation de la section droite $x = 0$ étant nulle par raison de symétrie, la rotation d'une section située à l'abscisse a pour valeur :

$$\theta_2 = \frac{1}{GJ} M_t . x$$

l'énergie interne dûe à l'application progressive du moment de torsion est égale à :

$$V_2 = \frac{1}{2} \frac{M_t^2 l}{GJ} \qquad (37)$$

1.3.1.3.4 - Valeur de Dxy

L'énergie interne de la plaque est exprimée en fonction du moment de torsion Mxy , clle du raidisseur peut être calculée en fonction de cette même quantité en remarquant que deux sections homologues (même abscisse) doivent tourner du même angle.

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{M_{xy} . x}{D(1-\nu)} = \frac{M_t . x}{GJ}$$

soit :

$$M_t = M_{xy} \frac{GJ}{D(1-\nu)} \qquad (38)$$

En reportant cette valeur dans l'expression de l'énergie interne du raidisseur il vient :

$$V_2 = \frac{1}{2} M_{xy}^2 \frac{GJ\, l}{D^2(1-\nu)^2} \qquad (39)$$

L'énergie interne de l'ensemble plaque raidisseur, est égale à la somme $V_1 + V_2$. Désignons par M^*_{xy} le moment de torsion appliqué par unité de longueur sur les côtés d'une plaque d'épaisseur constante sans raidisseur, et dont la rigidité à la flexion a pour valeur D^*

L'égalité des rotations conduit à la relation :

$$\frac{M_{xy}}{D} = \frac{M^*_{xy}}{D^*} \tag{40}$$

L'énergie interne de la plaque équivalente dûe à l'application du moment de torsion M^*xy étant égale à la somme $(V_1 + V_2)$ (critère d'équivalence), nous obtenons :

$$\frac{M^{*2}_{xy} \cdot a}{2\,D^*(1-\nu)} = \frac{M^2_{xy} \cdot a}{2\,D\,(1-\nu)} + \frac{M^2_{xy}\,GJ}{D^2\,(1-\nu)^2}$$

en tenant compte de (40), on obtient :

$$D^* = D + \frac{GJ}{a\,(1-\nu)} \tag{41}$$

Pour une plaque d'épaisseur constante h, les rigidités en flexion et en torsion, s'expriment par les relations :

$$D = \frac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}$$

$$D'_{xy} = \frac{G h^3}{12}$$

soit :

$$D\,(1-\nu) = 2\,D'_{xy}$$

en reportant ces valeurs dans (41), nous obtenons :

$$D_{xy} = D'_{xy} + \frac{GJ}{2a} \tag{42}$$

NOTA - Cette relation (42) peut être également obtenue à partir de la relation (38)

$$M_t = M_{xy}\,\frac{GJ}{D(1-\nu)}$$

La plaque équivalente sera soumise à un moment de torsion par unité de longueur équivalent à

$$M_{xy} + \frac{M_t}{a}$$

soit :

$$M_{xy}\left[1 + \frac{GJ}{D \cdot a\,(1-\nu)}\right]$$

Pour que la plaque subisse, sous l'action de ce moment de torsion, les mêmes déformations que la plaque renforcée, sa rigidité à la torsion doit être augmentée dans le même rapport que les moments :

$$D_{xy} = D'_{xy}\left[1 + \frac{GJ}{D \cdot a \cdot (1-\nu)}\right]$$

soit avec $$2\,D'_{xy} = D(1-\nu)$$

il vient $$D_{xy} = D'_{xy} + \frac{GJ}{2a}$$

1.3.1.4 - Détermination de D_1

La rigidité D de la plaque équivalente au système plaque-raidisseur étant indépendante du mode de chargement, cette rigidité sera définie comme étant celle d'une plaque d'épaisseur constante h qui, soumise à une contrainte de traction suivant l'axe Ox, accumule une énergie interne identique à celle de la plaque renforcée, lorsque les déformations sont égales.

Ainsi, nous obtenons successivement :

- Pour la plaque seule soumise à une contrainte de traction

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\,\varepsilon_x$$
$$\sigma_y = \frac{\nu E}{1-\nu^2}\,\varepsilon_x$$
$$V_1 = \frac{1}{2}\,\frac{E\,\varepsilon_x^2}{1-\nu^2}\,S_p\,.\,l$$

avec V_1 énergie interne et

$$S_p = a\cdot h$$

- Pour le raidisseur

$$\sigma_{1x} = E\,\varepsilon_x$$
$$\sigma_{1y} = 0 \qquad \text{sur } h$$
$$V_2 = \frac{1}{2}\,E\,\varepsilon_x^2\,S_R\,l$$

avec $S_R = t.H$

- Pour la plaque équivalente

$$\sigma_{2x} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\varepsilon_x \qquad (43)$$
$$\sigma_{2y} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}\,\varepsilon_x$$
$$V = \frac{E\,\varepsilon_x^2}{1-\nu^2}\,S\,l$$

avec $S = ah^*$

l'égalité des énergies internes conduit à la relation :

$$\frac{1}{2}\,\frac{E\,\varepsilon_x^2}{1-\nu^2}\,S_p + \frac{1}{2}\,E\,\varepsilon_x^2\,S_R = \frac{1}{2}\,\frac{E\,\varepsilon_x^2}{1-\nu^2}\,S$$

soit après simplification

$$S_P + S_R\,(1-\nu^2) = S \tag{44}$$

d'où la valeur h^*

$$h^* = h + \frac{tH}{a}\,(1-\nu^2)$$

La rigidité D_1 est définie par les équations (a) et (b)

(a)
$$\sigma_x = E'_x\,\varepsilon_x + E''\,\varepsilon_y$$
$$\sigma_y = E'_y\,\varepsilon_x + E''\,\varepsilon_x$$

(b)
$$D_1 = \frac{E''h^3}{12}$$

il vient, compte tenu de (43)

$$D_1 = \frac{\nu E\,h^*}{12\,(1-\nu^2)}$$

soit

$$D_1 = \frac{\nu E}{12\,(1-\nu^2)}\left[h + \frac{tH}{a}\,(1-\nu^2)\right]^3 \tag{45}$$

1.3.2 - ETUDES DES PLAQUES TRES MINCES AVEC RAIDISSEURS

Introduction :

L'étude des plaques renforcées par des raidisseurs longitudinaux peut être effectuée par la méthode des rigidités équivalentes lorsque les rigidités en flexion de la plaque et des raidisseurs sont voisines. En outre, on néglige dans ces calculs la déformée propre de l'élément de plaque compris entre deux renforts, cette hypothèse étant valable pour des plaques épaisses dont les raidisseurs sont proches les uns des autres.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, la déformée du plan moyen obtenue en résolvant l'équation différentielle (7) coïncide avec les résultats expérimentaux, ainsi que le montrent les travaux effectués par W.H. HOPPMANN (19) et N.J. HUFFINGTON (21) sur des plaques dont les sections droites ont les formes indiquées sur les croquis ci-dessous

Dans le cas des plaques minces, il convient de déterminer la déformée de l'élément de plaque compris entre deux raidisseurs. En outre, les déformations de cet élément ne sont plus négligeables par rapport à l'épaisseur de la plaque et la théorie linéaire classique cesse d'être valable.

Deux méthodes de résolution sont alors généralement adoptées :

- La première consiste à rechercher des fonctions particulières pour (flèche) et F (fonction de contraintes) satisfaisant aux équations de VON KARMAN , et aux différentes conditions aux limites imposées à la plaque.

Rappelons que ces équations s'écrivent :

$$\Delta\Delta F = E\left[\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right]$$

et

$$\Delta\Delta\omega = \frac{h}{D}\left[\frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right]$$

Une des principales difficultés de cette méthode réside dans le choix de ces fonctions, en particulier lorsque les conditions aux limites cessent de s'exprimer simplement. Elles ont été employées par certains auteurs K.T. SUNDARA (44) S. LEVY (28) pour l'étude des plaques sur appuis simples ou encastrées sur leur contour, mais, à notre connaissance, ces fonctions n'ont pas été utilisées dans le cas de plaques encastrées sur des appuis élastiques.

Il est possible, dans certains cas, d'obtenir une bonne approximation en linéarisant la seconde équation. On note en effet, que les termes dûs aux contraintes de membrane, se traduisent par une charge supplémentaire négligeable par rapport à la charge transversale. Cette hypothèse a été adoptée par Z. HASHIN (16), qui résout dès lors le problème

$$\Delta\Delta F = 0$$

$$\Delta\Delta\omega = \frac{q}{D}$$

dans un domaine limité par des poutres de rive travaillant en flexion et en torsion. Les contraintes de membrane apparaissant dans les expressions traduisant les conditions aux limites.

- La seconde méthode, que nous avons davantage développée dans ce chapitre, consiste à déterminer la déformée de la plaque sous l'action des charges transversales en respectant sur le contour les conditions aux limites imposées, puis à étudier le comportement de la plaque sous l'action des contraintes de membrane par la méthode de l'énergie.

Il devient alors possible de calculer en fonction de la déformée les charges q_0 et q_1 respectivement équilibrées par les contraintes de flexion et les contraintes de membrane.

Cette méthode présente l'avantage de n'avoir à choisir pour le calcul de l'énergie de déformation que la forme des déplacements compatibles avec les conditions aux limites.

Comme les précédentes, la solution obtenue n'est pas rigoureuse, mais cette méthode permet d'obtenir une bonne approximation des termes non linéaires, et en particulier de mettre en évidence les variations des effets de membrane en fonction des paramètres géométriques définissant la plaque renforcée.

1.3.2.1 - Etude de la déformée de la plaque - Cas des faibles déformations

1.3.2.1.1 - Plaque soumise à une pression constante

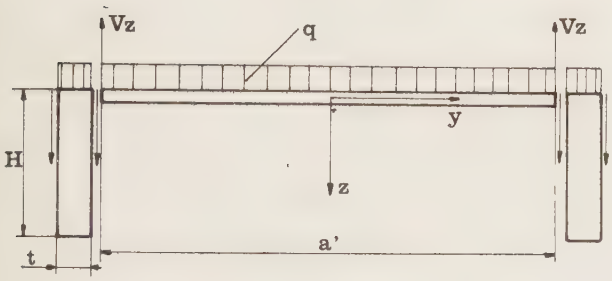


fig. 21

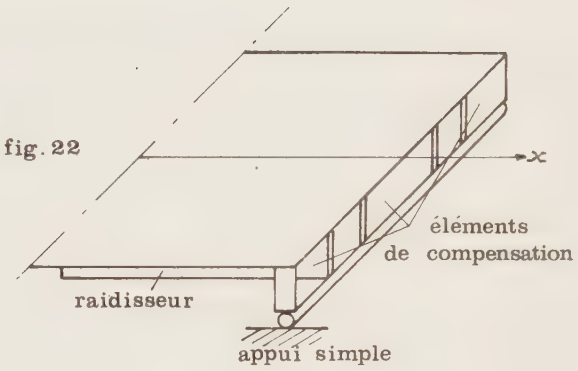


fig. 22

Nous considérons, dans cette étude, un élément de plaque de largeur a' situé entre deux raidisseurs identiques (figure 21).

L'axe des x est parallèle aux raidisseurs et situé à égale distance de chacun d'eux.

Les bords de la plaque $x = 0$ et $x = 1$ sont en appuis simples, des éléments de compensation permettant à la plaque de reposer sur les appuis.

Les bords de la plaque $y = \frac{a'}{2}$ sont considérés comme encastrés sur les raidisseurs élastiques, en raison de la continuité de la plaque.

La charge étant uniformément répartie sur toute la surface de la plaque, la surface fléchie sera symétrique par rapport à l'axe de x.

désignant la flèche d'un point quelconque de la plaque, dans la direction de l'axe des z cette flèche doit vérifier l'équation de LAGRANGE

$$D \Delta \Delta \omega = q \qquad (46)$$

La fonction ω doit en outre satisfaire aux conditions limites imposées à la plaque sur son contour.

1.3.2.1.1.1 - Conditions aux limites

Conditions sur les raidisseurs

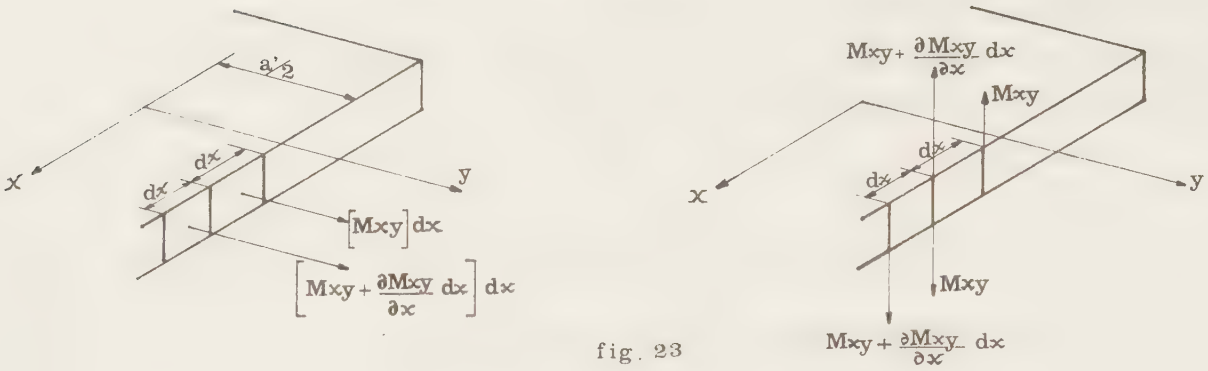


fig. 23

Le moment de torsion $M_{xy}dx$ qui s'exerce sur un élément de longueur dx des côtés $y = \pm \frac{a'}{2}$ de la plaque, est équivalent à deux forces verticales Mxy appliquées sur les côtés d'un élément de longueur dx.

Pour un élément voisin, le moment de torsion $\left[M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right] dx$ est équivalent à deux forces verticales $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$ et distantes de la longueur dx.

En procèdant ainsi pour chacun des éléments du côté, on voit que la répartition des moments peut être remplacée par une répartition de forces de cisaillement d'intensité

$$\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)_{y=\frac{a'}{2}}$$

à l'effort de cisaillement Qy qui s'exerce sur la lisière du bord supérieur du raidisseur vient s'ajouter la quantité précédente

d'où la valeur de l'effort de cisaillement résultant :

$$V_y = - Q_y + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)_{y=\frac{a'}{2}}$$

soit, en remplaçant ces quantités par leur valeur exprimée en fonction de la flèche nous obtenons la relation établie par KIRCHHOFF:

$$-V_y = D\left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y=\frac{a'}{2}}$$

et l'équation aux dérivées partielles de la ligne élastique d'un raidisseur est

$$EI^*\left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}\right)_{y=\frac{a'}{2}} = 2D\left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y=\frac{a'}{2}} \qquad (47)$$

Cette relation, qui traduit la première condition limite, est établie en tenant compte de l'action sur les raidisseurs des plaques situées de part et d'autre de ces derniers.

La plaque, étant considérée comme encastrée sur les raidisseurs, entraine :

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \qquad \text{pour} \qquad y = \frac{a'}{2} \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{a'}{2} \tag{48}$$

L'effort tranchant étant nul (par raison de symétrie) pour $y = 0$, donne une troisième condition

$$-V_y = D\left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y=0} = 0 \tag{49}$$

<u>Conditions sur les appuis simples</u>

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 0 \\ M_y = 0 \end{array}\right. \qquad \text{pour} \qquad x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = l$$

1.3.2.1.1.2 - <u>Résolution de l'équation de LAGRANGE</u>

Posons :

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

avec :

$$\omega_1 = \frac{q}{24D}\left(x^4 - 2lx^3 + l^3 x\right) \tag{50}$$

représente la flèche d'une bande parallèle à l'axe des x chargée uniformément, elle satisfait à l'équation (46) et aux conditions limites pour les bords $x = 0$ et $x = l$

ω_1 développée sous une forme d'une série trigonométrique s'écrit :

$$\omega_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^5} \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{51}$$

avec $m = 1 , 3 , 5 \ldots$

Recherchons pour ω_2 une solution de la forme proposée par LEVY

$$\omega_2 = \sum_{m=1}^{m=\infty} Y_m \sin\frac{m\pi x}{l}$$

avec $m = 1 , 3 , 5 \ldots$

où Y_m est une fonction de y seul

L'expression de ω_2 doit satisfaire à l'équation

$$\Delta\Delta\omega_2 = 0$$

Ce qui entraine pour Y_m , en tenant compte des conditions de symétrie, une solution de la forme

$$Y_m = \frac{q l^4}{D}\left[A_m \, Ch \frac{m\pi y}{l} + B_m \frac{m\pi y}{l} \, Sh \frac{m\pi y}{l} \right] \tag{52}$$

Cette équation vérifie la condition (49)

La solution générale sera de la forme :

$$\omega = \frac{q l^4}{D} \sum_m^{\infty} \left[A_m \, Ch \frac{m\pi y}{l} + B_m \frac{m\pi y}{l} \, Sh \frac{m\pi y}{l} + \frac{4}{m^5 \pi^5} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \tag{53}$$

avec $m = 1 , 3 , 5 \cdots$

<u>Détermination des constantes Am et Bm</u>

Posons :

$$\beta_m = \frac{m\pi a'}{2l}$$

$$\lambda = \frac{E I^*}{l D}$$

la condition limite (47) s'écrit :

$$EI \frac{m^4 \pi^4 q}{D} \sum_m^{\infty} \left[A_m Ch\beta_m + B_m \beta_m Sh\beta_m + \frac{4}{m^5 \pi^5} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} =$$

$$2D \left[\frac{q l^4}{D} \sum_m^{\infty} A_m \frac{m^3 \pi^3}{l^3} Sh\beta_m + B_m \frac{m^4 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{a'}{2} Ch\beta_m + 3 \frac{m^3 \pi^3}{l^3} Sh\beta_m \right.$$

$$\left. - (2-\nu) q \frac{m^2 \pi^2 l^2}{D} \sum_m A_m \frac{m\pi}{l} Sh\beta_m + B_m \beta_m \frac{m\pi}{l} Ch\beta_m + B_m \frac{m\pi}{l} Sh\beta_m \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \tag{54}$$

La condition (48) permet d'obtenir une seconde relation entre Am et Bm

$$A_m Sh\beta_m + B_m \left[\beta_m Ch\beta_m + Sh\beta_m \right] = 0 \tag{55}$$

La résolution de ce système d'équations donne, tous calculs faits :

$$Am = \frac{-4\lambda}{m^5 \pi^5} \cdot \frac{\pi \left[\beta_m Ch\beta_m + Sh\beta_m \right]}{\pi\lambda \left[\beta_m + Ch\beta_m Sh\beta_m \right] + \frac{4}{m} Sh^2 \beta_m} \tag{56}$$

$$Bm = \frac{4\lambda}{m^5 \pi^5} \cdot \frac{\pi \, Sh\beta_m}{\pi\lambda \left[\beta_m + Ch\beta_m Sh\beta_m \right] + \frac{4}{m} Sh^2 \beta_m}$$

Ces valeurs reportées dans l'équation (53) permettent d'obtenir l'équation générale de la déformée.

1.3.2.1.2 - Plaque soumise à une pression hydrostatique

Définition

Considérons le même élément de plaque que dans le paragraphe précédent soumis à l'action d'une pression hydrostatique.

La pression varie linéairement, suivant l'axe des x ,($q = 0$ pour $x = 0$) et reste constante suivant une direction parallèle à l'axe de y

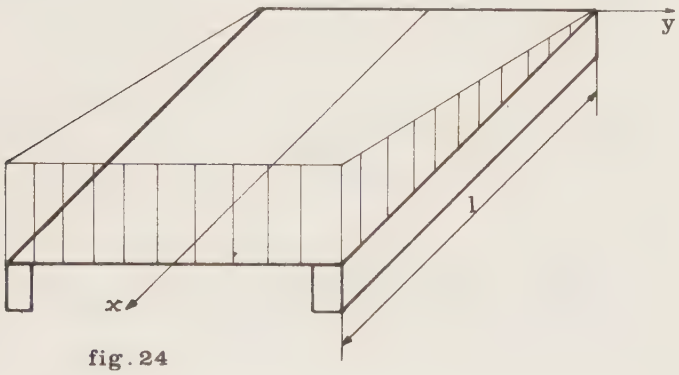


fig. 24

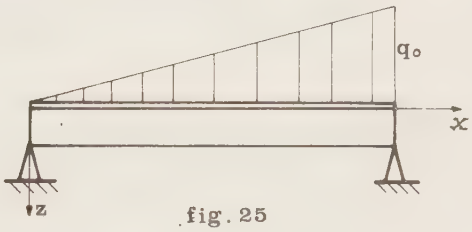


fig. 25

Les conditions aux limites imposées à cet élément de plaque sont identiques aux précédentes, ω représentant la flèche en un point quelconque, cette flèche doit vérifier l'équation :

$$\Delta\Delta\omega = \frac{q}{D}$$

soit

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} = \frac{q_0\,x}{D\,l}$$

Résolution de l'équation de LAGRANGE

posons $$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

avec $$\omega_1 = \frac{q_0}{360\,D}\left[\frac{3x^5}{l} - 10\,l\,x + 7\,l^3 x\right]$$

ω_1 représente l'équation de la flèche d'une bande parallèle à l'axe des x , soumis à une pression variant linéairement. Elle satisfait à l'équation de LAGRANGE et aux conditions limites pour les bords $x = 0$ et $x = l$

ω_2 représente l'équation générale de l'équation sans second membre

ω_1 représentée sous forme d'une série trigonométrique s'écrit :

$$\omega_1 = \frac{2q_0 l^4}{D\pi^5}\cdot\sum \frac{(-1)^{m+1}}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$m = 1 , 2 , 3 \ldots$

Rechercons pour ω_2 une fonction de la forme

$$\omega_2 = \sum_{m=1}^{m=\infty} Y_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{l}$$

avec Ym fonction de y seulement.

Un calcul analogue aux précédents conduit au résultat

$$\Delta\Delta\,\omega_2 = 0$$

et

$$\omega = \frac{q_0 l^4}{D} \sum_m^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{m^5\pi^5} + A'_m \operatorname{Ch}\frac{m\pi y}{l} + B'_m \frac{m\pi y}{l} \operatorname{Sh}\frac{m\pi y}{l} \right] \sin\frac{m\pi x}{l}$$

avec

$$A'_m = \frac{-2(-1)^{m+1}}{m^5\pi^5} \cdot \frac{\lambda\pi\,(\beta_m \operatorname{Ch}\beta_m + \operatorname{Sh}\beta_m)}{\lambda\pi\,(\beta_m + \operatorname{Ch}\beta_m \operatorname{Sh}\beta_m) + \frac{4}{m}\operatorname{Sh}^2\beta_m}$$

(57)

et

$$B'_m = \frac{+2(-1)^{m+1}}{m^5\pi^5} \cdot \frac{\lambda\pi \operatorname{Sh}\beta_m}{\lambda\pi\,(\beta_m + \operatorname{Ch}\beta_m \operatorname{Sh}\beta_m) + \frac{4}{m}\operatorname{Sh}^2\beta_m}$$

Ces valeurs reportées dans l'équation de la déformée permettent d'obtenir la flèche en un point quelconque de la plaque.

Les calculs numériques effectués dans les paragraphes suivants se rapportent au cas d'une charge uniformément répartie. La détermination des valeurs numériques de A'm et B'm (correspondant au premier terme m = 1) étant immédiate lorsque Am et Bm sont connus.

1.3.2.1.3 - Détermination de la rigidité équivalente D x

1.3.2.1.3.1 - Expression de D x

Au lieu de procéder comme au paragraphe 1.3.1, nous avons déterminé la rigidité équivalente D x en étudiant le comportement d'une plaque d'épaisseur constante soumise à un même état de chargement et présentant, sur son contour, les mêmes conditions limites que la plaque renforcée.

L'équation de la déformée de la plaque isotrope sera établie en faisant tendre la hauteur H du raidisseur vers l'épaisseur h de la plaque.

D désignant la rigidité de la plaque, lorsque H tend vers h , l'inertie I^* du raidisseur de largeur t a pour valeur :

$$I^* = \frac{t\,D}{E}$$

le coefficient $\lambda = \frac{EI^*}{lD}$ tend vers la valeur λ'

avec
$$\lambda' = \frac{t}{l}$$

L'équation de la déformée conservant une forme analogue à la précédente, nous pouvons admettre que les énergies internes dans chacune des plaques seront égales lorsque les flèches au centre de chaque plaque seront identiques.

L'égalité des flèches au centre conduit à la relation :

$$\frac{ql^4}{D} \sum_m^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda\pi\left[\beta_m Ch\beta_m + Sh\beta_m\right]}{\lambda\pi\left[\beta_m + Ch\beta_m Sh\beta_m\right] + \frac{4}{m} Sh^2\beta_m} \right] \frac{4}{m^5\pi^5} =$$

$$\frac{ql^4}{D_x^*} \sum_m^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda'\pi\left[\beta_m Ch\beta_m + Sh\beta_m\right]}{\lambda'\pi\left[\beta_m + Ch\beta_m Sh\beta_m\right] + \frac{4}{m} Sh^2\beta_m} \right] \frac{4}{m^5\pi^5}$$

d'où la valeur D^*_x

$$D_x^* = D \sum_m^{\infty} \frac{\left[\lambda'\pi\left(\beta_m - Sh\beta_m\right)\left(1 - Ch\beta_m\right) + \frac{4}{m} Sh^2\beta_m\right]\left[\lambda\pi\left(\beta_m + Ch\beta_m Sh\beta_m\right) + \frac{4}{m} Sh^2\beta_m\right]}{\left[\lambda\pi\left(\beta_m - Sh\beta_m\right)\left(1 - Ch\beta_m\right) + \frac{4}{m} Sh^2\beta_m\right]\left[\lambda'\pi\left(\beta_m + Ch\beta_m Sh\beta_m\right) + \frac{4}{m} Sh^2\beta_m\right]}$$

avec $m = 1, 3, 5 \ldots\ldots$

1.3.2.1.3.2 - <u>Valeur asymptotique de la fonction D x</u>

Lorsque la distance l entre les appuis simples est grande par rapport au pas des raidisseurs, nous avons :

$$(\beta_m)_{m=1} \simeq 0$$

et en première approximation

$$Sh\beta \simeq \beta$$
$$Ch\beta \simeq 1$$

En reportant ces valeurs dans l'équation précédente, nous obtenons pour le premier terme de la série

$$D_x^* = D \frac{\lambda\pi + 2\beta}{\lambda'\pi + 2\beta}$$

soit en remplaçant β, λ et λ' par leur valeur

$$D_x^* = \frac{EI^* + Da'}{t + a'}$$

a' désignant la distance entre deux raidisseurs

$$a' = a - t$$

d'où

$$D^*_x = \frac{D(a-t) + EI^*}{a}$$

Cette valeur est identique à celle obtenue dans les paragraphes précédents (formule 22).

1.3.2.2 - Etude de la déformée de la plaque - Cas des grandes déformations

Définition :

Les résultats du paragraphe précédent ont été établis en admettant par hypothèse, qu'au cours de la déformation, les flèches restaient faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque.

Dans le cas contraire, qui correspond en particulier à celui des plaques renforcées de faibles épaisseurs, il est nécessaire de faire intervenir dans le calcul de la détermination des flèches, l'influence des contraintes normales et tangentielles dûes à la déformation du plan moyen de la plaque.

Dans ce but, nous pouvons appliquer la méthode de l'énergie, en considérant initialement que les raidisseurs sont infiniment rigides. Cette méthode consiste :

- A déterminer le travail de déformation de la plaque dû uniquement à la tension de la surface moyenne

- A exprimer ce travail en fonction des déplacements U , V , W , d'un point quelconque de la plaque

- A rechercher pour ces déplacements des expressions mathématiques convenables satisfaisant aux conditions limites sur le contour de la plaque. Ces expressions sont fonction de plusieurs paramètres arbitraires dont les valeurs sont déterminées par le principe des déplacements virtuels.

1.3.2.2.1 - Expression de l'énergie interne

Nx , Ny , Nxy désignant les forces normales et tangentielles appliquées sur un élément de la plaque de hauteur h et de largeur unité, le travail de déformation dû à ces forces a pour expression :

$$V = \frac{1}{2} \iint \left(N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} \right) dx\, dy$$

l'intégrale étant étendue à tout l'élément de palque compris entre deux raidisseurs

sachant que :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{hE} \left(N_x - \nu N_y \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{hE}\left(N_y - \nu N_x\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{N_{xy}}{hG}$$

il vient : $$V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \cdot \iint \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\,\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1}{2}(1-\nu)\,\gamma_{xy}^2\right] dx\,dy$$

Les dilatations linéiques s'expriment en fonction des déplacements U , V , W , par les relations

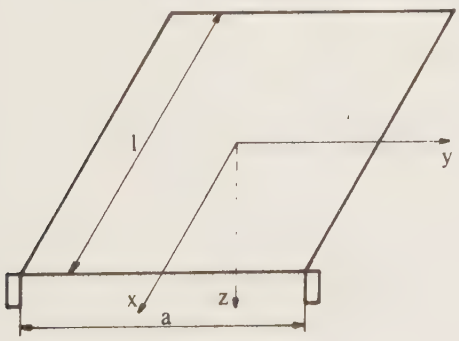
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \qquad (58)$$

En reportant ces valeurs dans l'expression de l'énergie de déformation, il vient :

$$\begin{aligned} V = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \iint \Bigg\{ & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ & + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]^2 + 2\nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\ & + \frac{1-\nu}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\Bigg\} dx\,dy \end{aligned} \qquad (59)$$

1.3.2.2.2 - Détermination des déplacements

Considérons l'élément de plaque compris entre deux raidisseurs, cet élément peut être assimilé à une plaque dont deux côtés opposés sont encastrés et les deux autres reposent sur des appuis simples.



Par rapport à un système d'axes orthonormé Oxyz, centré sur l'élément (voir figure ci-contre), les déplacements U et V doivent être des fonctions impaires, W une fonction paire.

Ces fonctions doivent en outre satisfaire aux conditions limites sur le contour de la plaque.

Conditions limites $\quad u = v = w = 0 \quad$ pour $\quad x = \pm \frac{l}{2}$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm\frac{a'}{2}} = 0$$

Ces déplacemants peuvent ainsi s'exprimer par les relations

$$\begin{aligned} u &= C \sin\frac{2\pi x}{l} \cos\frac{\pi y}{a} \\ v &= C' \sin\frac{2\pi y}{a} \cos\frac{\pi x}{l} \\ w &= \frac{w_0}{2} \cos\frac{\pi x}{l}\left(1 + \cos\frac{2\pi y}{a}\right) \end{aligned} \qquad (60)$$

1.3.2.2.3 - Détermination de la flèche au centre et des constantes C et D

En reportant les expressions des déplacements (60) dans l'équation de l'énergie potentielle (59), on obtient, tous calculs faits

$$\begin{aligned} V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \Bigg\{ & \frac{\pi^2 C^2 a}{l} - \frac{8}{15}\frac{\pi^2 C \omega_0^2 a}{l^2} + \frac{\pi^2 C'^2 l}{a} \\ & + \frac{1}{4}\left[\frac{\pi^4 \omega_0^4}{64}\left(\frac{a}{l^3}\frac{105}{16} + \frac{9l}{a^3} + \frac{15}{6al}\right)\right] \\ & + 2\nu\left[\frac{16 CC'}{9} + \frac{C'\omega_0^2 \pi^2}{6l} - \frac{4}{15}\frac{\pi^2 C \omega_0^2}{a}\right] \\ & + \frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\pi^2 C^2 l}{4a} + \frac{32}{9} CC' + \frac{\pi^2 C'^2 a}{4l} - \frac{4}{15}\frac{C\pi^2\omega_0^2}{a} - \frac{C'\pi^2\omega_0^2}{3l}\right]\Bigg\} \end{aligned} \qquad (61)$$

1.3.2.2.3.1 - Détermination des constantes C et D

La variation des paramètres C et C' ne produit que des déplacements horizontaux, le travail de la charge verticale est donc nul.

Ainsi

$$\frac{\partial V}{\partial C} = \frac{\partial V}{\partial C'} = 0 \qquad (62)$$

En posant

$$l = n\,a$$

l'expression de l'énergie potentielle (61) s'écrit

$$V = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\omega_0^4 \pi^4}{256\, l^2} F(n) + \frac{C\omega_0^2 \pi^2}{l} G_1(n) + C' \frac{\omega_0^2 \pi^2}{l} G_2 \right.$$

$$\left. + C^2 E_1(n) + C'^2 E_2(n) + CC'.\, J \right]$$

avec

$$F(n) = \frac{105}{16n} + 9n^3 + \frac{15n}{6}$$

$$G_1(n) = -\frac{[2n^2(1+3\nu)+8]}{15n}$$

$$G_2 = \frac{3\nu-1}{6}$$

$$E_1(n) = \frac{\pi^2[8+(1-\nu)n^2]}{8n}$$

$$E_2(n) = \frac{\pi^2[8n^2+1-\nu]}{8n}$$

$$J = \frac{16(\nu+1)}{9}$$

En reportant ces expressions dans (62), on obtient un système de deux équations du premier degré en C et D dont la résolution conduit aux résultats

$$C = \frac{\frac{\omega_0^2 \pi^2}{l}\left[JG_2 - 2G_1(n)E_2(n)\right]}{4\, E_1(n)\cdot E_2(n) - J^2} \tag{63}$$

et

$$C' = \frac{\frac{\omega_0^2 \pi^2}{l}\left[JG_1(n) - 2G_2 E_1(n)\right]}{4\, E_1(n)\cdot E_2(n) - J^2}$$

1.3.2.2.3.2 - Détermination de la flèche au centre

Appliqué au paramètre ω_0, le principe des déplacements virtuels nous donne

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_0}\, d\omega_0 = \iint q\, d\omega_0 \cdot \frac{1}{2} \cos\frac{\pi x}{l}\left(1+\cos\frac{2\pi y}{a}\right) dx\, dy$$

soit

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_0}\, d\omega_0 = q\frac{d\omega_0}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos\frac{\pi x}{l}\, dx \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(1+\cos\frac{2\pi y}{a}\right) dy$$

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_0} = \frac{q l^2}{n\pi} \tag{64}$$

En reportant les valeurs de C et C' (63) dans l'expression de l'énergie potentielle, on obtient après dérivation, et compte tenu de la relation (64)

$$\omega_0^3 \; H(n) = \frac{q l^4}{E h} \tag{65}$$

avec

$$H(n) = \frac{n \pi^5}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{64} F(n) - 4 \left[\frac{J G_1(n) \cdot G_2 - G_1^2(n) E_2(n) - G_2^2 E_1(n)}{4 E_1(n) \cdot E_2(n) - J^2} \right] \right\}$$

Les valeurs numériques de la fonction H (n) sont données dans le tableau n°1

Cette valeur de ω_0 correspond à la flèche prise par la plaque lorsque cette dernière se comporte uniquement comme membrane.

L'expression (65) peut s'écrire sous la forme

$$\omega_0 = l \sqrt[3]{\frac{q l}{E h}} \sqrt[3]{H^{-1}_{(n)}} \tag{66}$$

Le paragraphe suivant se rapporte à la détermination de ω_0 dans le cas où la plaque repose sur des appuis élastiques et travaille simultanément en flexion et traction.

1.3.3. - FLECHE AU CENTRE D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE SOUMISE A UNE CHARGE CONSTANTE

1.3.3.1 - Cas des faibles déformations

1.3.3.1.1 - Expression de ω max

Pour un point quelconque de l'élément de plaque compris entre deux raidisseurs, et dans l'hypothèse où les flèches restent faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque, nous avons obtenu :

$$\omega = \frac{q l^4}{D} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left(A_m \, Ch \frac{m \pi y}{l} + B_m \frac{m \pi y}{l} \, Sh \frac{m \pi y}{l} + \frac{4}{m^5 \pi^5} \right) \sin \frac{m \pi x}{l}$$

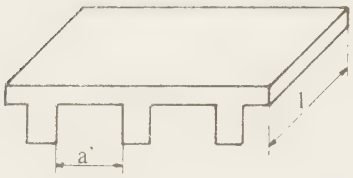
En admettant également par hypothèse que les raidisseurs qui limitent la plaque peuvent se déformer en flexion mais non en torsion (cette hypothèse est prati-

TABLEAU N° 1 - VALEURS DE LA FONCTION H (n)

$$n = \frac{1}{a}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H (n)	37,59	390,96	1914,9	6023,7	14.704	30.509	56.563	96.554	154.738	235.941

quement vérifiée par raison de symétrie pour l'élément de plaque de longueur l et de largeur a', placé symétriquement par rapport à l'axe Ox), les coefficients A_m et B_m ont pour valeur



$$A_m = \frac{-4\lambda}{m^5\pi^5} \cdot \frac{\pi\left(\beta_m \operatorname{Ch}\beta_m + \operatorname{Sh}\beta_m\right)}{\pi\lambda\left(\beta_m + \operatorname{Ch}\beta_m \operatorname{Sh}\beta_m\right) + \frac{4}{m}\operatorname{Sh}^2\beta_m}$$

$$B_m = \frac{4\lambda}{m^5\pi^5} \cdot \frac{\pi \operatorname{Sh}\beta_m}{\pi\lambda\left(\beta_m + \operatorname{Ch}\beta_m \operatorname{Sh}\beta_m\right) + \frac{4}{m}\operatorname{Sh}^2\beta_m}$$

avec $\beta_m = \frac{m\pi a'}{2l}$ $\qquad \lambda = \frac{EI^*}{lD}$ $\qquad m = 1, 3, 5 \ldots$

La flèche maximum est obtenue au centre de la plaque

$$x = \frac{l}{2}$$

$$y = 0$$

ainsi

$$\omega_{max} = \frac{ql^4}{D} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left(A_m + \frac{4}{m^5\pi^5}\right) \tag{67}$$

La flèche maximum est donc déterminée en fonction des caractéristiques géométriques de la plaque, de la pression uniforme q et des coefficients A_m

Dans la suite des calculs nous poserons

$$\omega_{max} = \alpha \cdot \frac{ql^4}{D} \tag{68}$$

les valeurs numériques de α, que nous avons calculées, sont portées dans le tableau n° 2.

La série définissant ω_{max} étant rapidement convergents, on obtient des résultats satisfaisants en ne prenant que les deux premiers termes de la série - l'erreur commise en négligeant les termes suivants reste inférieure à 0,5 %.

Les courbes représentatives de α en fonction de λ sont portées sur le plan n° 1.

1.3.3.1.2 - Cas particuliers

1.3.3.1.2.1 - $\lambda = 0$

La valeur $\lambda = 0$ correspond au cas particulier où l'élément central de la plaque repose sur deux appuis simples, les deux autres côtés étant libres.

pour cette valeur de λ les deux premiers termes de la série nous donnent

$$\alpha = 0,01301861$$

la valeur exacte de ce coefficient étant

$$\alpha = \frac{5}{384} = 0,0130208$$

Notons que cette valeur exacte est obtenue en faisant $x = \frac{l}{2}$ dans l'équation non développée (50)

1.3.3.1.2.2 - $\underline{\lambda \Rightarrow \infty}$

Lorsque λ augmente indéfiniment, la plaque peut être considérée, compte tenu de l'hypothèse citée au début de ce chapitre, comme ayant deux de ses côtés opposés en appuis simples et les deux autres encastrés sur des supports indéformables.

Le calcul d'une telle plaque a été effectué par S. TIMOSHENKO (46), et les valeurs de λ correspondantes sont indiquées dans la dernière colonne du tableau n° 2 (repère $\lambda = \infty$)

1.3.3.1.3 - Conclusion

Pour les valeurs de λ intermédiaires, les résultats précédents indiquent que la diminution des flèches est particulièrement importante lorsque le paramètre croît de la valeur 0 à 10.

1.3.3.2 - Flèche au centre des raidisseurs

1.3.3.2.1 - Expression de la flèche

La flèche au centre des raidisseurs est obtenue en faisant $x = \frac{l}{2}$ et $y = \frac{a'}{2}$ dans l'équation générale de la déformée

Il vient ainsi :

$$\omega_{r\,max} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left(A_m \, Ch\beta_m + B_m \beta_m \, Sh\beta_m + \frac{4}{m^5 \pi^5} \right) \cdot \frac{q l^4}{D}$$

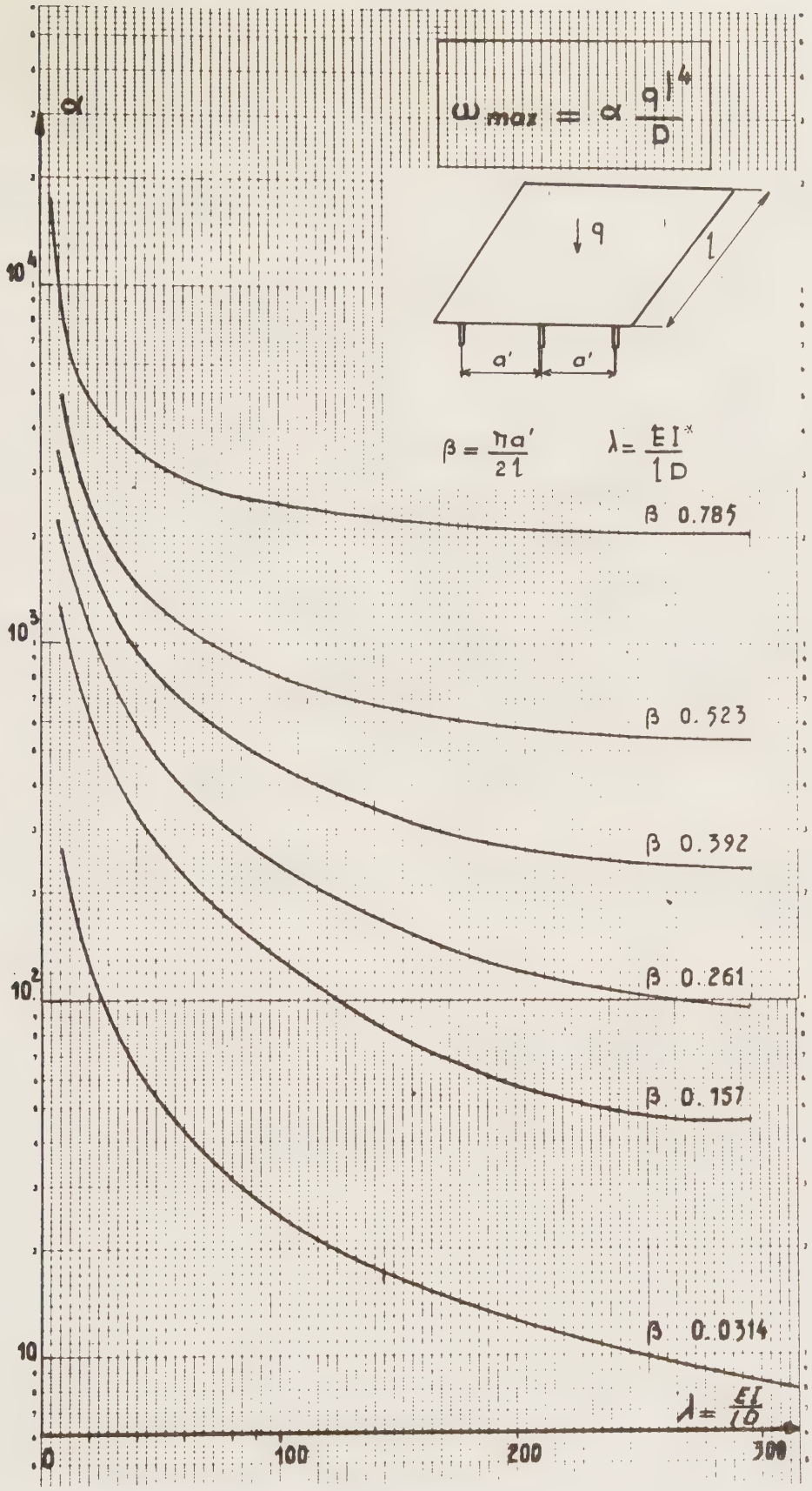
soit de la forme :

$$\omega_{r\,max} = \alpha' \frac{q l^4}{D} = \frac{\alpha'}{\alpha} \, \omega_{max} \qquad (69)$$

Tableau N° 2 - $\omega_{max} = \alpha \frac{q l^4}{D}$ - valeur de $\alpha \cdot 10^7$

β \ λ	0	1	5	10	20	40	75	90	105	240	300	510	600	10^4	∞
π	130186	109835	93664	89636	87269	85981	85500	85230	85200	84850	84797	84750	84704	84616	84400
$\pi/2$	130186	72300	36371	28560	24094	21711	20563	20341	20178	19645	19461	19450	19420	19228	19200
$\pi/4$	130186	44262	13218	7685	4718	3180	2449	2312	2208	1872	1821	1733	1715	1616	1625
$\pi/6$	130186	32741	8413	4491	2432	1379	880	785	715	486	454	393	381	318	321
$\pi/8$	130186	26209	6317	3282	1708	907	529	457	404	231	203	166	155	100	101
$\pi/10$	130186	21723	5041	2588	1325	685	384	326	283	145	124	91	85	40	41,6
$\pi/12$	130186	18610	4215	2151	1093	557	306	258	223	108	90	60	53	20	20
$\pi/16$	130186	14538	3196	1621	818	413	224	187	161	74	60	38	33	7	6,3
$\pi/20$	130186	11835	2554	1291	650	327	175	146	125	57	46	28	25	3	2,6
$\pi/100$	130186	2552	519	259	130	65	35	29	25	10,9	8,7	5,7	4,5	0,8	0,41

pour $\lambda = \infty$, voir S. TIMOSHENKO - PLAQUES et COQUES (page 187)



Valeurs du coefficient α (reliant la flèche au centre de la plaque à la pression constante uniformément répartie) en fonction des paramètres β et λ

1.3.3.2.2.- Détermination de α'

En remplaçant les coefficients Am et Bm par leurs valeurs (56), on obtient, tous calculs faits

$$\alpha' = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{16}{m^6 \pi^6} \frac{Sh^2\beta_m}{\lambda\left(\beta_m + Ch\beta_m Sh\beta_m\right) + \frac{4}{m\pi} Sh^2\beta_m}$$

avec

$$\beta_m = \frac{m\pi a'}{2l}$$

Pour les plaques très minces, le coefficient β_1 est généralement faible tandis que le coefficient λ est élevé.

Le second terme du dénominateur est donc très petit par rapport au premier, et la valeur de α' peut se mettre sous la forme

$$\alpha'\lambda = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{16\, Sh^2\beta_m}{m^6\pi^6\left[\beta_m + Ch\beta_m Sh\beta_m\right]} \qquad (70)$$

Pour un nombre β constant, nous avons ainsi

$$\alpha'\lambda = \text{constant}$$

Dans les calculs suivants, la valeur du coefficient α' sera déterminé à partir de l'équation (70).

1.3.3.3 - Cas des grandes déformations

Dans le cas général, la charge uniformément répartie q est équilibrée simultanément par les contraintes de flexion et de cisaillement, et par les contraintes normales.

La charge q peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$q = q_1 + q_2 \qquad (71)$$

avec

q_1 : charge équilibrée par les contraintes de flexion (cas des faibles flèches)

q_2 : charge équilibrée par les contraintes normales (effet de membrane)

En nous reportant aux résultats établis dans les paragraphes précédents, il vient :

(68) $$q_1 = \frac{\omega_{max} D}{\alpha l^4} = \frac{\omega_{max} E h^3}{12(1-\nu^2)\alpha l^4} \qquad (72)$$

Le calcul de la plaque travaillant en membrane fait intervenir la flèche propre de la plaque qui a pour valeur :

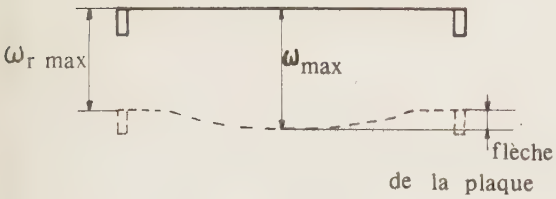


fig. 27

$$\omega_{max} - \omega_{r\,max} = \omega_o^*$$

En exprimant $\omega_{r\,max}$ en fonction de ω_{max} (69), il vient :

$$\omega_{max}\left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \omega_o^* \qquad (73)$$

Ainsi, dans le cas des grandes déformations l'expression (66) s'écrit :

$$\omega_{max} - \omega_{r\,max} = l\sqrt[3]{\frac{q_2 l}{Eh}} \cdot \sqrt[3]{H_{(n)}}^{-1}$$

soit :

$$\omega_{max}\left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) = l\sqrt[3]{\frac{q_2 l}{Eh}} \cdot \sqrt[3]{H_{(n)}}^{-1}$$

d'où

$$q_2 = \omega_{max}^3\left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 \cdot \frac{Eh}{l^4} H_{(n)} \qquad (74)$$

en reportant ces valeurs dans (71)

$$q = \omega_{max}\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\alpha l^4} + \omega_{max}^3\left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 \frac{Eh}{l^4} H_{(n)}$$

cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{q l^4}{Dh} = \frac{1}{\alpha}\frac{\omega_{max}}{h} + 12(1-\nu^2) H_{(n)}\left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3\left(\frac{\omega_{max}}{h}\right)^3 \qquad (75)$$

La résolution de cette équation permet de déterminer la flèche max, tous les paramètres étant définis par la géométrie de la plaque.

Le coefficient $\frac{1}{\alpha}$ du terme du premier degré est une fonction de et (tableau n°2)

Le coefficient du second terme dépend uniquement de β c'est-à-dire du nombre de raidisseurs, mais pas de leur inertie.

Les deux plans suivants indiquent l'allure des courbes obtenues à partir de l'équation (75) en fonction des paramètres λ et β

en posant

$\omega_o = \omega_{max}$ flèche au centre de la plaque

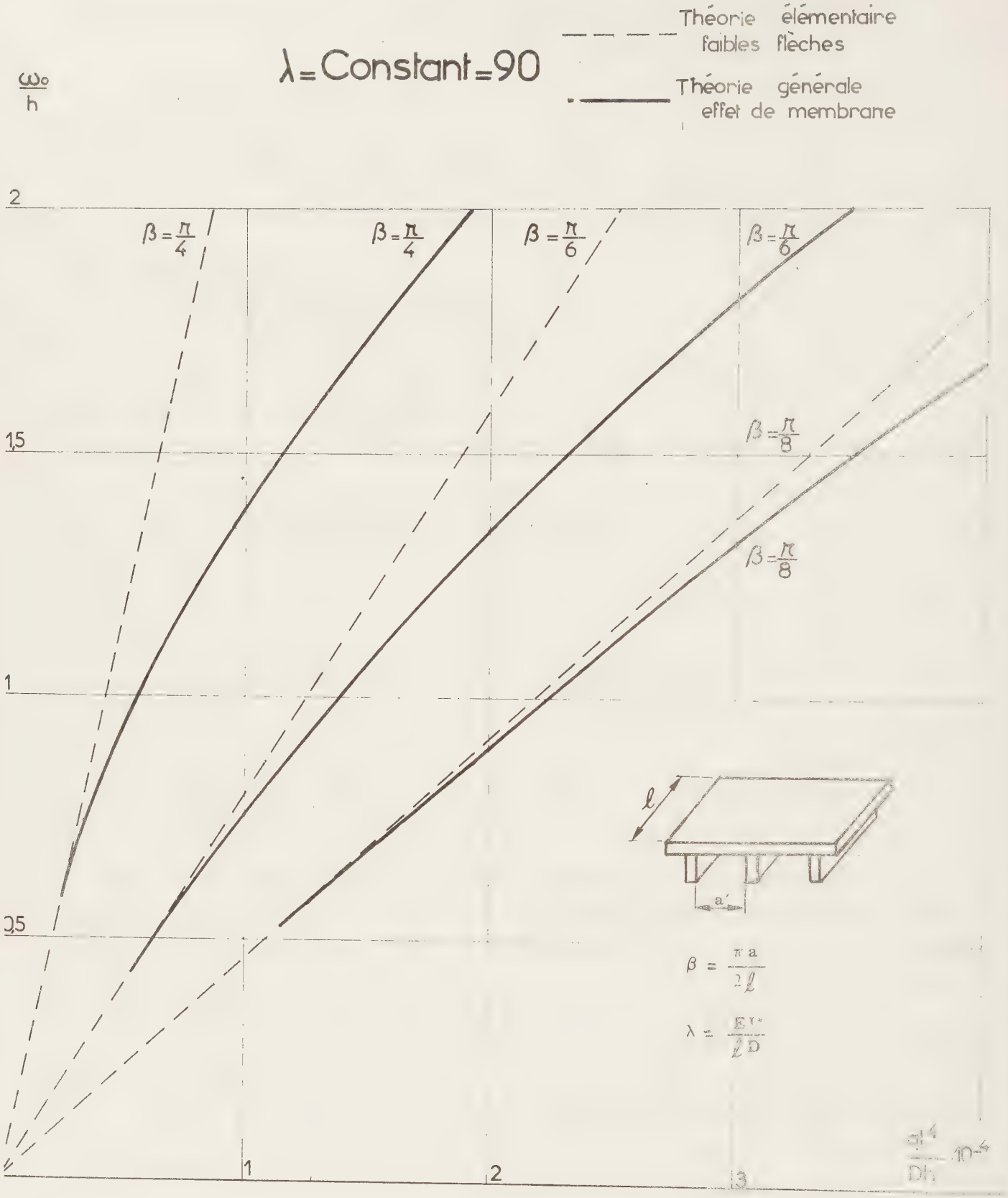


FIG.28 Variations de la flèche au centre de la plaque en fonction de la pression constante uniformément répartie - Influence de l'effet de membrane.

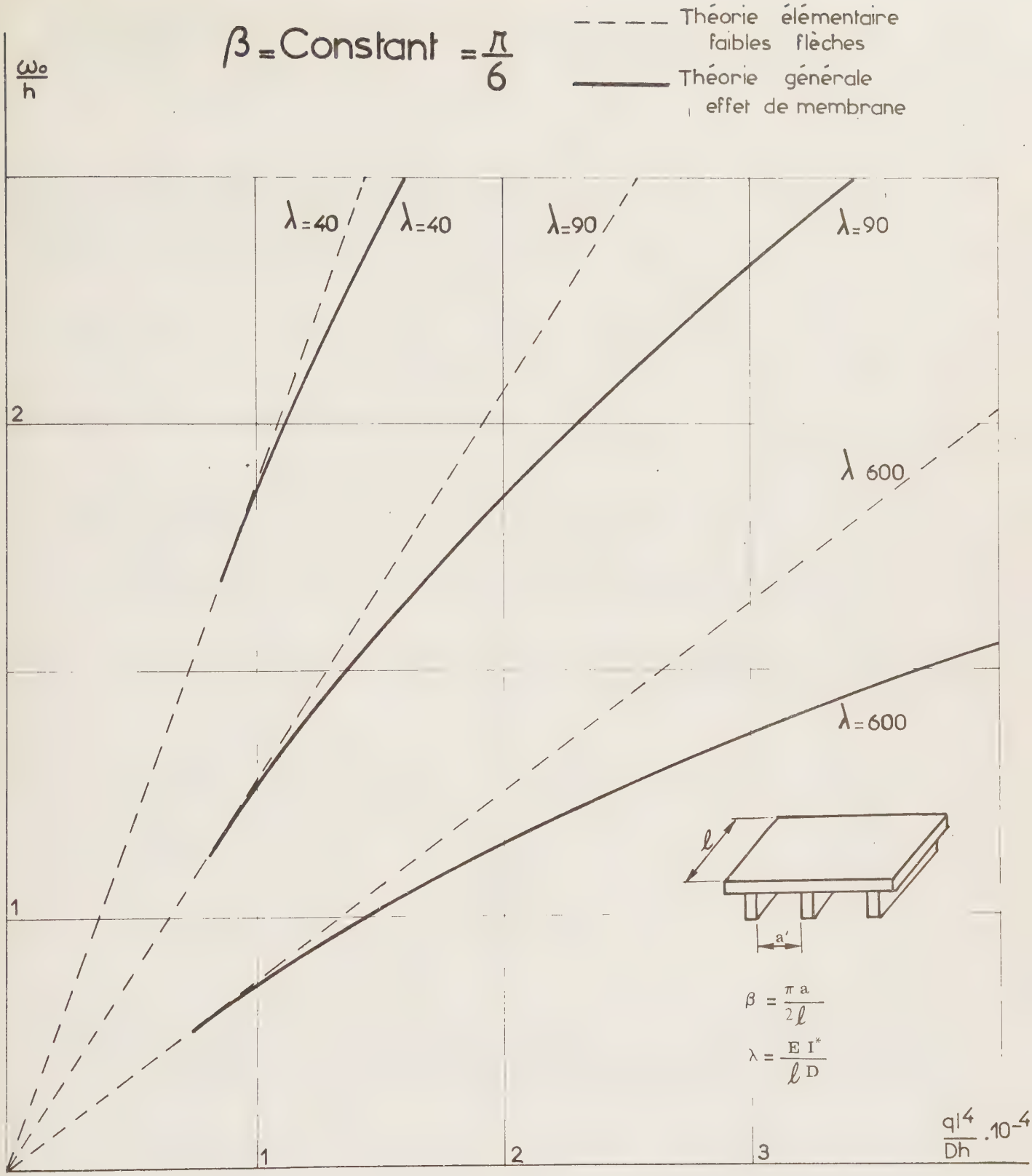
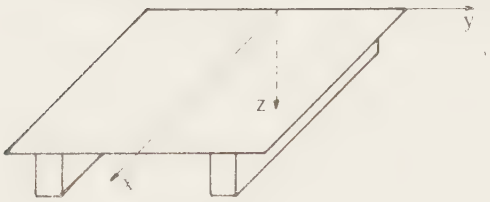


FIG. 29 Variations de la flèche au centre de la plaque en fonction de la pression constante uniformément répartie - Influence de l'effet de membrane.

1.3.4 - DETERMINATION DES CONTRAINTES ET DES DILATATIONS LINEIQUES POUR LES PLAQUES CHARGEES PAR UNE PRESSION UNIFORME

Introduction



Considérons l'élément de plaque compris entre deux raidisseurs et rapporté au système d'axes Oxyz déjà utilisé dans les paragraphes précédents.

Pour chaque section de largeur unité et de hauteur h découpée dans la plaque perpendiculairement à l'un des axes Ox ou Oy , la containte normale peut être calculée par superposition des contraintes de flexion et de membrane.

La contrainte normale dûe au moment de flexion varie linéairement en fonction de z , elle est nulle sur l'axe neutre de la section (figure a). Suivant le signe du moment fléchissant, la fibre supérieure de la plaque est en traction ou compression.

La contrainte normale dûe à l'effet de membrane est constante sur toute la section (figure b).

La superposition de ces deux états conduit à une répartition linéaire, comme nous l'avons indiqué sur la figure c.

- a - - b - - c -

La détermination respective de ces contraintes sera établie en notant que la charge uniformément répartie q supportée par la plaque se décompose en deux parties q et q , de telle sorte que q soit équilibrée par les contraintes de flexion et q par les contraintes de membrane.

1.3.4.1 Moments de flexion

1.3.4.1.1 - Expression du moment de flexion

La plaque étant soumise à une pression uniforme q_1 la flèche en un point quelconque a pour expression

$$\omega = \frac{q_1 l^4}{D} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[A_m \, Ch \frac{m\pi y}{l} + B_m \frac{m\pi y}{l} \, Sh \frac{m\pi y}{l} + \frac{4}{m^5 \pi^5} \right] \sin \frac{m\pi x}{l}$$

avec $m = 1, 3, 5 \ldots$

Dans une section quelconque de la plaque de coordonnées x, y, et dans les directions perpendiculaires aux axes de référence, les moments de flexion s'expriment en fonction de la flèche ω par les relations :

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \qquad (76)$$

en reportant la valeur de ω dans les relations (76) il vient

$$M_x = q_1 l^2 \left[\frac{4}{m^3 \pi^3} + (1-\nu) \pi^2 m^2 \sum \left(A_m Ch \frac{m\pi y}{l} + B_m \left[\frac{m\pi y}{l} Sh \frac{m\pi y}{l} - \frac{2\nu}{1-\nu} Ch \frac{m\pi y}{l} \right] \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$M_y = q_1 l^2 \left[\frac{4\nu}{m^3 \pi^3} - (1-\nu) \pi^2 m^2 \sum \left(A_m Ch \frac{m\pi y}{l} + B_m \left[\frac{m\pi y}{l} Sh \frac{m\pi y}{l} + \frac{2}{1-\nu} Ch \frac{m\pi y}{l} \right] \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \qquad (77)$$

Am et Bm ayant les valeurs définies dans les paragraphes précédents.

Les expressions (77) définissant les moments de flexion Mx et My peuvent se mettre sous la forme

$$M_x = \alpha_x \, q_1 l^2$$

$$M_y = \alpha_y \, q_1 l^2 \qquad (78)$$

Les coefficients αx et αy étant des fonctions des coordonnées x et y et des paramètres λ et β . (ces derniers permettant de définir les valeurs Am et Bm).

L'étude des variations de ces fonctions montre que les valeurs maximales des coefficients αx et αy sont obtenues dans l'un des deux cas suivants :

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2} \qquad y = 0$$

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{a}{2}$$

Ces valeurs maximales de αx et αy ont été calculées en tenant compte des deux premiers termes de la série (77), et sont portées dans le tableau n°3 avec les notations définies ci-dessous, et pour une valeur du coefficient de Poisson de :

$$\nu = 0.3$$

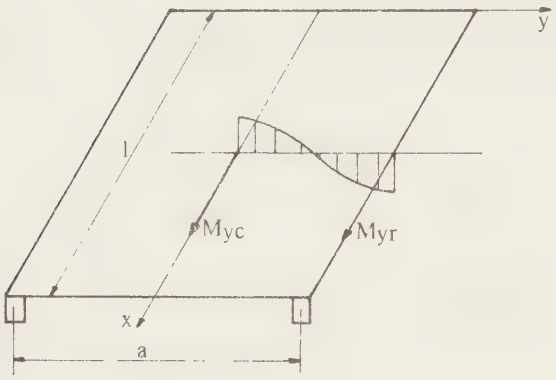


fig. 31

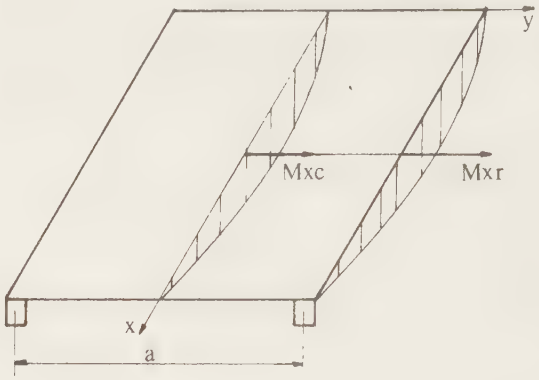


fig. 32

Pour un point de coordonnées quelconques x y, les coefficients αx et αy peuvent être calculés à partir des équations précédemment citées (77). L'utilisation d'un ordinateur nous a permis d'obtenir les valeurs de ces coefficients pour

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{x}{l} = \frac{1}{2}$$

y variant de 0 à $\frac{a}{2}$ avec un pas de $\frac{a}{20}$

ceci pour différentes valeurs de λ et β indiquées dans le tableau N°3 .

Les résultats obtenus au centre de la plaque $(x = \frac{l}{2} \quad y = 0)$ et au centre du raidisseur $(x = \frac{l}{2} \quad y = \frac{a}{2})$ sont portés dans le tableau n°3 .

- Centre de la plaque

$$Myc = \alpha_{yc} \cdot q_1 l^2$$

$$Mxc = \alpha_{xc} \cdot q_1 l^2$$

- Centre du raidisseur

$$Myr = \alpha_{yr} \cdot q_1 l^2$$

$$Mxr = \alpha_{xr} \; q_1 l^2$$

les variations des coefficients α_{yc}, α_{xc} , α_{yr} , α_{xr} , en fonction du paramètre λ sont portés sur les graphes n° 33 , 34 , 35 , 36

Tableau N° 3 $\quad M_{ij} = \alpha_{ij}\, q_1 l^2$ - Valeurs de $\alpha_{ij} \cdot 10^5$ $\quad i = x, y$ $\quad j = c, r$

β	$\lambda =$	1	5	10	20	40	90	210	300	600	10^4
	α_{xc}	10850	9539	9212	9020	8873	8855	8826	8820	8812	8806
3,14	α_{xr}	5320	-3843	-1805	-2639	-3095	-3359	-3484	-3512	-3545	-3576
$= \pi$	α_{yc}	4177	4516	4601	4650	4667	4693	4700	4702	4704	4706
	α_{yr}	-3250	-8813	-10198	-11012	-11456	-11714	-11835	-11862	-11895	-11925
		7398	4232	3536	3143	2933	2812	2756	2743	2728	2714
1,57	"	4864	1259	-915	-1503	-1817	-1998	-2082	-2101	-2123	-2145
$= \frac{\pi}{2}$		3544	3415	3387	3371	3363	3358	3355	3355	3354	3354
		-1935	-5462	-6237	-6675	-6909	-7044	-7106	-7121	-7137	-7153
		4484	1590	1074	797	654	573	535	526	516	507
0,785	"	3673	485	-83	-387	-546	-635	-676	-685	-696	-707
$= \frac{\pi}{4}$		2019	1395	1283	1223	1192	1175	1167	1165	1163	1161
		-332	-1806	-2070	-2210	-2283	-2325	-2344	-2348	-2353	-2358
		3269	965	592	399	299	243	217	211	204	198
0,523	"	2873	470	83	-120	-224	-282	-310	-315	-323	-329
$= \frac{\pi}{6}$		1346	746	644	598	572	558	551	550	548	546
		111	-798	-944	-1021	-1060	-1082	-1093	-1095	-1098	-1100
		2583	695	407	258	182	139	120	115	110	105
0,392	"	3348	415	121	-32	-110	-153	-173	-178	-183	-188
$= \frac{\pi}{8}$		1000	477	397	356	335	323	317	316	315	314
		246	-420	-522	-575	-602	-617	-624	-625	-627	-629
		2137	543	309	188	127	92,8	77	73,5	69,4	65,5
0,314	"	1981	363	126	3,2	-58,9	-93,8	-110	-113,3	-117,5	-121,5
$= \frac{\pi}{10}$		793	339	272	237	220	210	206	204,7	203,6	202,5
		287	-246	-324	-354	-385	-397	-402	-403	-404	-405,7
		1410	329	179	102	64	42	32	30	27,2	24,8
0,196	"	1346	258	107	30	-8,8	-30,5	-40,5	-42,7	-45,3	-47,8
$= \frac{\pi}{16}$		487	159	125	102,6	91	84,92	82,02	81,36	80,6	79,9
		274	-64,4	-111,5	-135,5	-147,6	-154,4	-157,5	-158,2	-159	-159,8
		1150	260,4	139	77,8	46,8	29,5	21,6	19,8	17,73	15,77
0,157	"	1108	214,9	93,3	31,6	0,509	-16,83	-24,8	-26,56	-28,65	-30,62
$= \frac{\pi}{20}$		387,5	123,7	87,8	69,6	60,4	55,3	52,9	52,4	51,8	51,2
		247,7	-26,9	-64,3	-83,3	-92,8	-98,2	-100,6	-101,2	-101,8	-102,4
		245,7	50,4	25,6	13,10	6,86	3,39	1,81	1,452	1,03	0,643
0,0314	"	243,9	48,57	23,72	11,25	5,01	1,54	-0,040	-0,398	-0,815	-1,207
$= \frac{\pi}{100}$		75,5	16,99	9,54	5,80	3,93	2,89	2,416	2,309	2,184	2,065
		69,5	10,84	3,38	-0,358	-2,233	-3,275	-3,751	-3,858	-3,984	-4,102

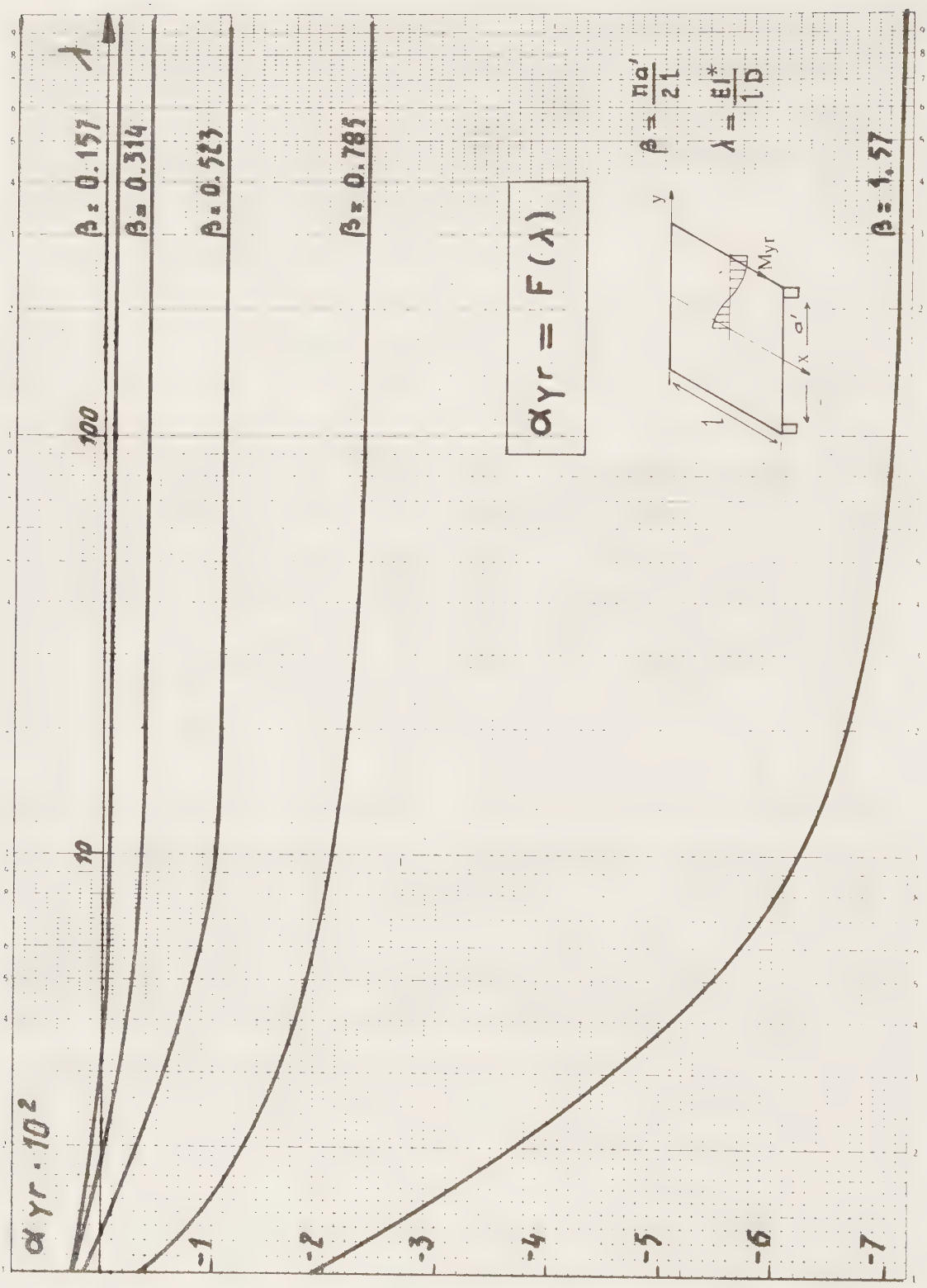


FIGURE 33 - Valeurs du coefficient α_{yr} (reliant le moment de flexion M_{yr} à la pression constante uniformément répartie) en fonction des paramètres λ et β

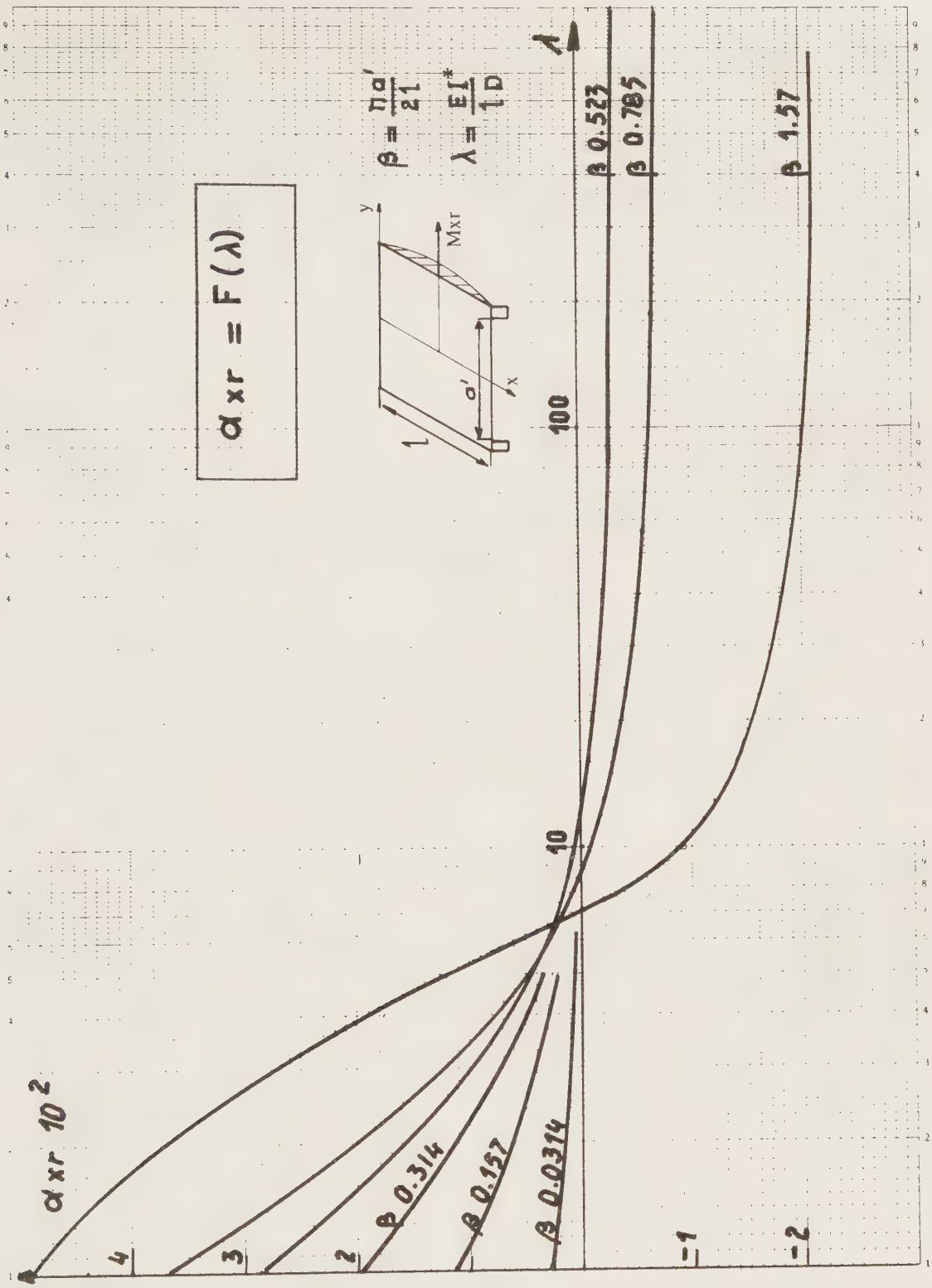


FIGURE 34 - Valeurs du coefficient α_{xr} (reliant le moment de flexion M_{xr} à la pression constante uniformément répartie) en fonction des paramètres λ et β

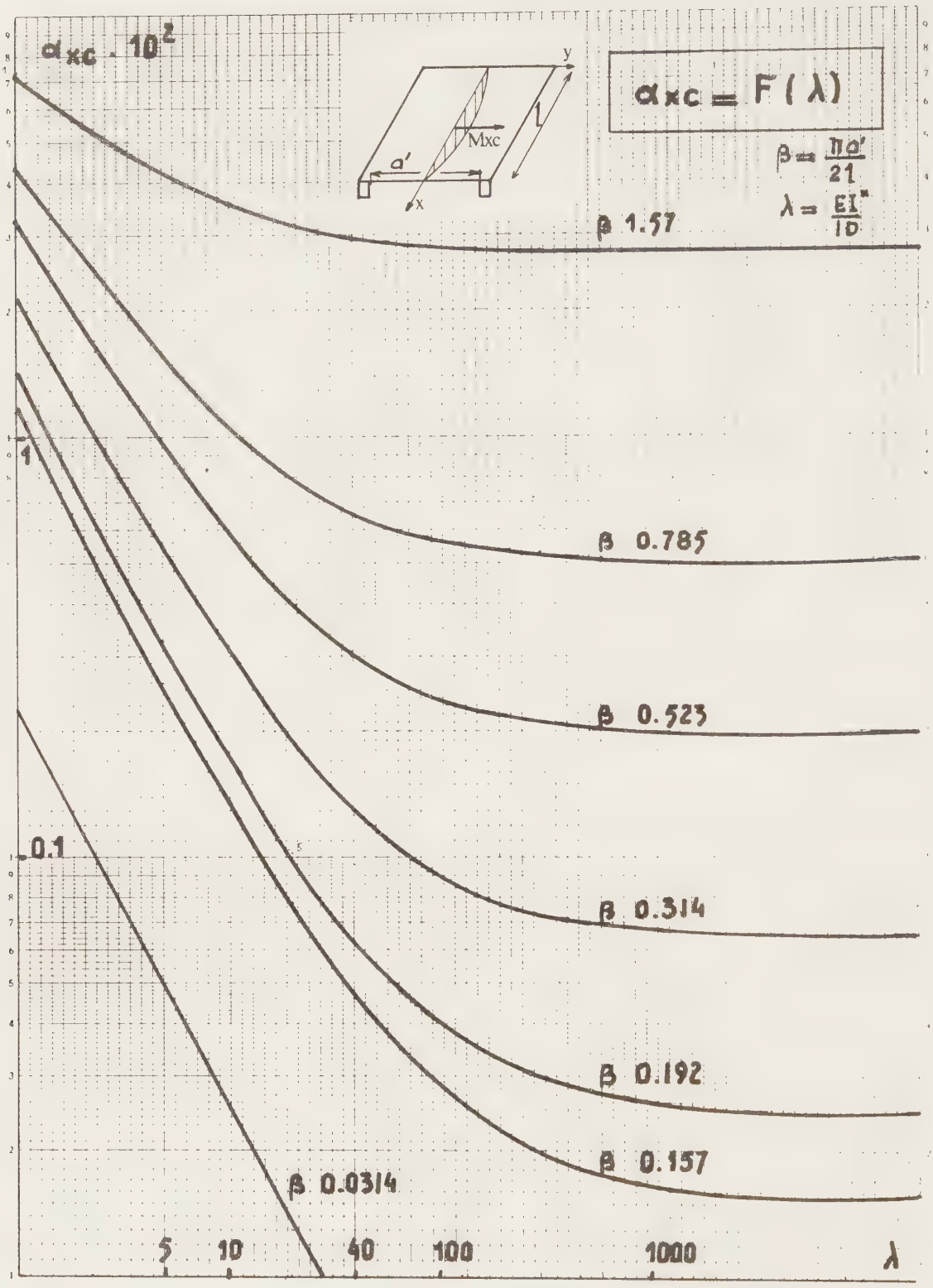


FIGURE 35 - Valeurs des coefficients α_{xc} (reliant le moment de flexion M_{xc} à la pression constante uniformément répartie) en fonction des paramètres λ et β

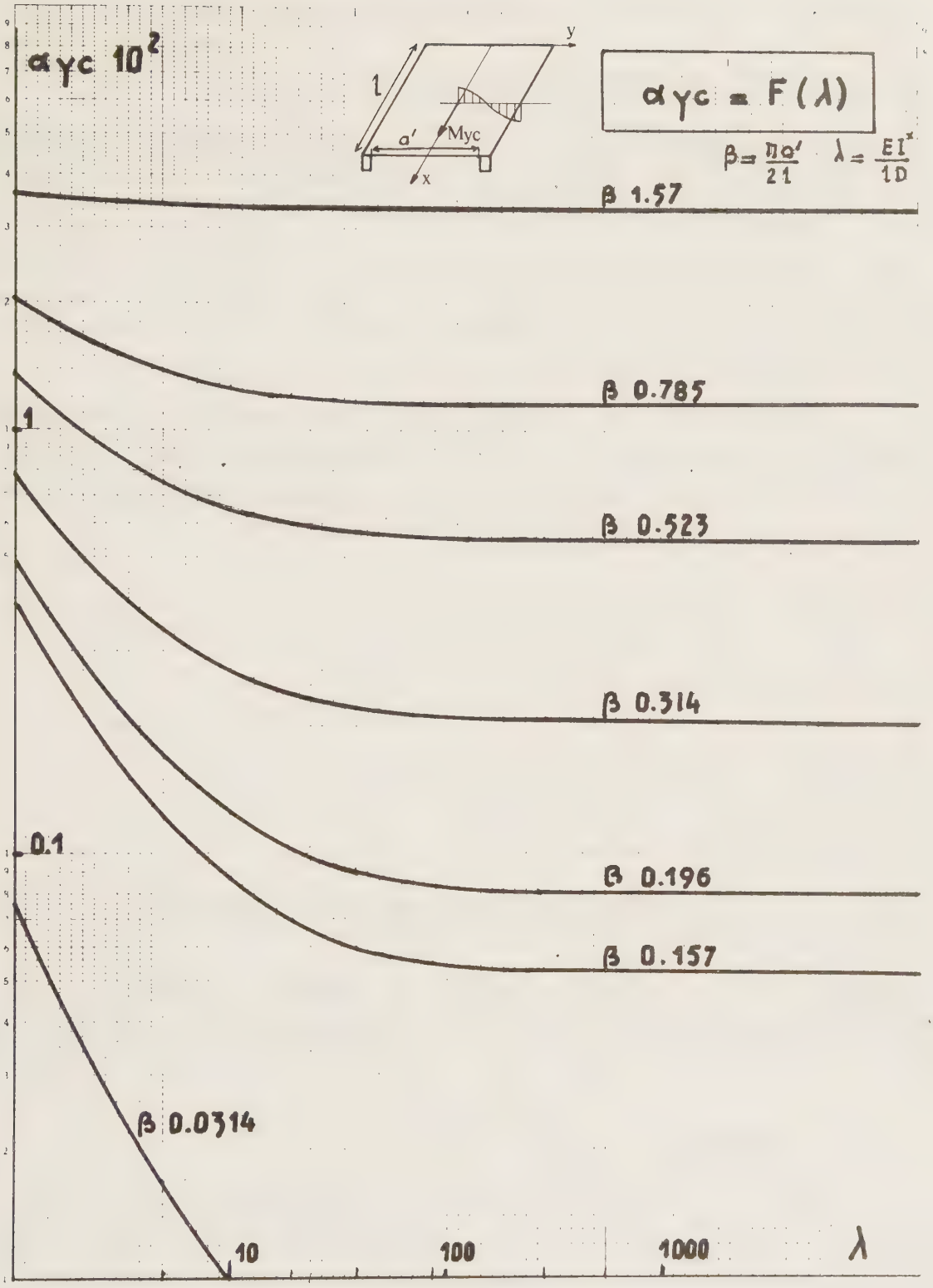


FIGURE 36 - Valeurs des coefficients α_{yc} (reliant le moment de flexion M_{yc} à la pression constante uniformément répartie) en fonction des paramètres λ et β

1.3.4.1.2 - Valeurs particulières - Comparaison avec d'autres résultats

1er Cas : Plaque sur appuis rigides

L'étude des valeurs des coefficients αx et αy portés dans le tableau n° 3, nous montre que pour β = constant, ces coefficients tendent vers une valeur limite lorsque λ augment indéfiniment (voir graphes n° 33 à 36)

Ces valeurs particulières obtenues pour $\lambda = \infty$ correspondent au cas particulier où les raidisseurs sont indéformables. Ainsi, les conditions aux limites sur le contour de la plaque se confondent avec celles d'une plaque dont deux côtés sont encastrés et les deux autres reposent sur des appuis simples.

Ce dernier cas ayant été traité par S. TIMOSHENKO (46), nous donnons dans le tableau ci-dessous les valeurs de αx et αy correspondant à $\lambda = 10^4$ et calculées à partir de la formule (77) et les valeurs obtenues par l'auteur précité. Ces dernières valeurs sont portées dans le tableau sous le repère $\lambda = \infty$

		α_{Yr}		α_{Yc}		α_{xc}	
β	$\frac{a}{l}$	$\lambda = \infty$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = \infty$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = \infty$	$\lambda = 10^4$
π	2	- 0,1191	- 0,1192	0,0474	0,0471	0,0869	0,0880
$\frac{\pi}{2}$	1	- 0,0607	- 0,0715	0,0332	0,0335	0,0244	0,0271
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	- 0,0210	- 0,0235	0,0105	0,0116	0,0035	0,0050

Conclusion :

Les courbes représentant les variations des coefficients αx et αy (plans n° 33 à 36) montrent que ces coefficients atteignent pratiquement les valeurs asymptotiques pour des valeurs de λ voisines de 200 - Ceci étant particulièrement exact pour les grandes valeurs de β

Etant donné que pour une plaque dont les dimensions sont connues, le coefficient λ est proportionnel à l'inertie des raidisseurs, et le coefficient β proportionnel à l'entraxe des raidisseurs, nous pouvons noter que pour un nombre de raidisseurs fixé à priori, une augmentation de l'inertie de ces éléments au delà d'une

certaine valeur (correspondant à $\lambda \simeq 200$), n'entraine aucune modification sur les valeurs maximales des contraintes pricipales.

L'augmentation de matière contribue dès lors uniquement à diminuer la flèche de la plaque.

Si les déformations de la plaque n'ont pas de répercussions prépondérantes sur son comportement et pour un taux de contrainte admissible fixé, il conviendra donc de déterminer la valeur de λ maximum donnant l'inertie optimale des raidisseurs. Cette détermination de λ pourra être effectuée à l'aide des courbes de variation des coefficients αx et αy.

2° Cas : Pas de raidisseurs

Pour les valeurs particulières $\lambda = 0$, les coefficients Am et Bm sont nuls, les coefficients αx et αy sont donc indépendants de β

Les valeurs exactes de ces coefficients sont obtenues en prenant l'expression non développée de la déformée

soit
$$\omega = \frac{q}{24D}\left[x^4 - 2lx^3 + l^3x\right]$$

en reportant dans (76), nous obtenons avec $\nu = 0,3$

$$\alpha_x = 0.125$$

$$\alpha_y = 0.0375$$

1.3.4.2 - Contraintes dûes aux moments de flexion

Les contraintes normales dûes aux moments de flexion, obtenues à partir des équations (78) varient linéairement sur l'épaisseur de la plaque, et ont pour expressions :

$$\sigma_x = \frac{3}{I}\,\alpha_x\, q_1 l^2$$

$$\sigma_y = \frac{3}{I}\,\alpha_y\, q_1 l^2$$

I représentant le moment d'inertie d'un élément de largeur unité et de hauteur h, soit : $I = \frac{h^3}{12}$

Les valeurs maximales de ces contraintes s'exercent sur les fibres supérieures et inférieures de la plaque, elles ont pour valeur :

$$z = \pm \frac{h}{2} \qquad \sigma_{xm} = \pm \frac{6}{h^2} \alpha_x \, q_1 l^2$$

$$\sigma_{ym} = \pm \frac{6}{h^2} \alpha_y \, q_1 l^2$$

Les dilatations linéiques correspondantes s'expriment par les relations :

$$\varepsilon'_x = \pm \frac{1}{E} \left[\sigma_{xm} - \nu \, \sigma_{ym} \right] = \pm \frac{6}{E h^2} \left(\alpha_x - \nu \alpha_y \right) q_1 l^2$$

$$\varepsilon'_y = \pm \frac{1}{E} \left[\sigma_{ym} - \nu \, \sigma_{xm} \right] = \pm \frac{6}{E h^2} \left(\alpha_y - \nu \alpha_x \right) q_1 l^2 \qquad (79)$$

Ces dilatations linéiques représentent une partie des quantités mesurées par les extensomètres électriques utilisés dans les expériences. La seconde partie étant déterminée par les dilatations dûes à l'effet de membrane.

1.3.4.3 - Contraintes dûes à l'effet de membrane

1.3.4.3.1 - Expressions des dilatations

En appliquant la méthode de l'énergie, nous avons admis par hypothèse pour les déplacements u , v , w dans les directions Ox , Oy , Oz , des expressions satisfaisant aux conditions limites sur le contour de la plaque.

Ces conditions correspondent à un cas théorique, en particulier en ce qui concerne les déplacements v dans la direction Oy au voisinage des raidisseurs. La validité de cette hypothèse fera l'objet d'une discussion dans le chapitre relatif aux résultats expérimentaux

Ces expressions u , v , w permettent de déterminer les dilatations linéiques dûes à l'effet de membrane à partir des relations

$$\varepsilon''_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon''_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

En remplaçant u , v , w par les relations précédemment adoptées (60)

$$\varepsilon''_x = \frac{2\pi C}{l} \cos\frac{2\pi x}{l} \cos\frac{\pi y}{a} + \frac{1}{2}\left[\frac{\omega_0}{2}\cdot\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi x}{l}\left(1+\cos\frac{2\pi y}{a}\right)\right]^2$$

$$\varepsilon''_y = \frac{2\pi C'}{a} \cos\frac{2\pi y}{a} \cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2}\left[\omega_0\cdot\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi y}{a}\right]^2 \qquad (80)$$

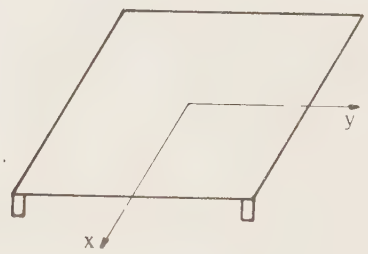
1.3.4.3.2 - Valeurs particulières

Au centre de la plaque avec le système choisi

$x = y = 0$

$$\varepsilon''_x = \frac{2\pi C}{l}$$

$$\varepsilon''_y = \frac{2\pi C'}{a}$$



Pour les points situés sur l'axe de y et au niveau des raidisseurs

$x = 0 \qquad Y = \pm\frac{a}{2}$

$$\varepsilon''_x = 0$$

$$\varepsilon''_y = -\frac{2\pi C'}{a}$$

Conclusions

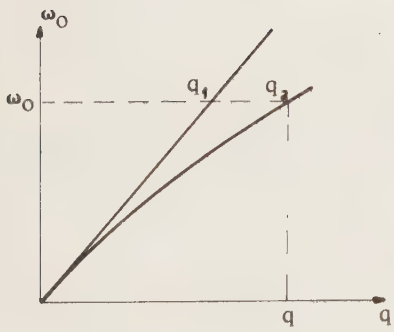


fig. 37

Sous l'action d'une charge q constante uniformément répartie, la flèche au centre de la plaque prend la valeur :

$$\omega_{max} = \omega_0$$

Cette valeur paut être calculée à partir de l'équation (75)

La charge constante q étant prise sous la forme

$$q = q_1 + q_2$$

nous avons :

(72) $$q_1 = \frac{\omega_{max} D}{\alpha l^4} = \frac{\omega_0 D}{\alpha l^4} \qquad \text{avec } D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

(74) $$q_2 = \omega_{max}^3 \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 \frac{Eh}{l^4} H_{(n)}$$

Les dilatations linéiques dûes aux contraintes de flexion (79) sont proportionnelles à q_1

(79) $$\varepsilon'_x = \pm \frac{6}{Eh^2} (\alpha_x - \nu \alpha_y) q_1 l^2$$

$$\varepsilon'_y = \pm \frac{6}{Eh^2} (\alpha_y - \nu \alpha_x) q_1 l^2$$

soit, compte tenu de (72), les dilatations au centre de la plaque s'expriment par les relations

$$\varepsilon'_x = \frac{\pm h \omega_0}{2 l^2 \alpha (1-\nu^2)} \cdot (\alpha_{xc} - \nu \alpha_{yc})$$

$$\varepsilon'_y = \frac{\pm h \omega_0}{2 l^2 \alpha (1-\nu^2)} \cdot (\alpha_{yc} - \nu \alpha_{xc})$$

Au centre de la plaque, les dilatations linéiques dûes aux contraintes de membrane ont été déterminées au paragraphe 1.3.4.3.2.

$$\varepsilon''_x = \frac{2\pi c}{l}$$

$$\varepsilon''_y = \frac{2\pi c'}{a}$$

les coefficients C et C' étant exprimés en fonction des relations (63) qui s'écrivent, compte tenu de (73)

$$c = \frac{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \pi^2}{l} \frac{J G_2 - 2 G_{1(n)} \cdot E_{2(n)}}{4 E_{1(n)} E_{(n)} - J^2}$$

$$c' = \frac{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \pi^2}{l} \frac{J G_{1(n)} - 2 G_2 \cdot E_{1(n)}}{4 E_{1(n)} E_{2(n)} - J^2}$$

soit de la forme

$$c = \frac{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \pi^2}{l} \cdot K_{1(n)}$$

$$c' = \frac{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \pi^2}{l} \cdot K_{2(n)}$$

Pour le centre de la plaque, la superposition des états conduit aux résultats

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x = \frac{\pm h\omega_0}{2l^2\alpha(1-\nu^2)} \cdot (\alpha_{xc} - \nu\alpha_{yc}) + \frac{2\pi^3}{l^2}\omega_0^2\left(1-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \cdot K_1(n)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon'_y + \varepsilon''_y = \frac{\pm h\omega_0}{2l^2\alpha(1-\nu^2)}(\alpha_{yc} - \nu\alpha_{xc}) + \frac{2\pi^3}{\alpha l}\omega_0^2\left(1-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 K_2(n) \qquad (81)$$

La détermination des contraintes et des dilatations linéiques sera donc établie ultérieurement à celle de la flèche ω_0

Les valeurs des fonctions $K_1(n)$ et $K_2(n)$ sont portées dans le tableau n° 4 et sont représentées sur le graphe n° 38

TABLEAU N° 4

Valeurs des coefficients K_1 et K_2 en fonction du nombre n de raidisseurs		
n	K_1	$K_2 \times 10^2$
1	0,0369	- 0,3206
2	0,0585	- 0,2941
3	0,0802	- 0,2824
4	0,0973	- 0,2623
5	0,1095	- 0,2388
6	0,1182	- 0,2160
7	0,1243	- 0,1955
8	0,1287	- 0,1777
9	0,1320	- 0,1622
10	0,1345	- 0,1489

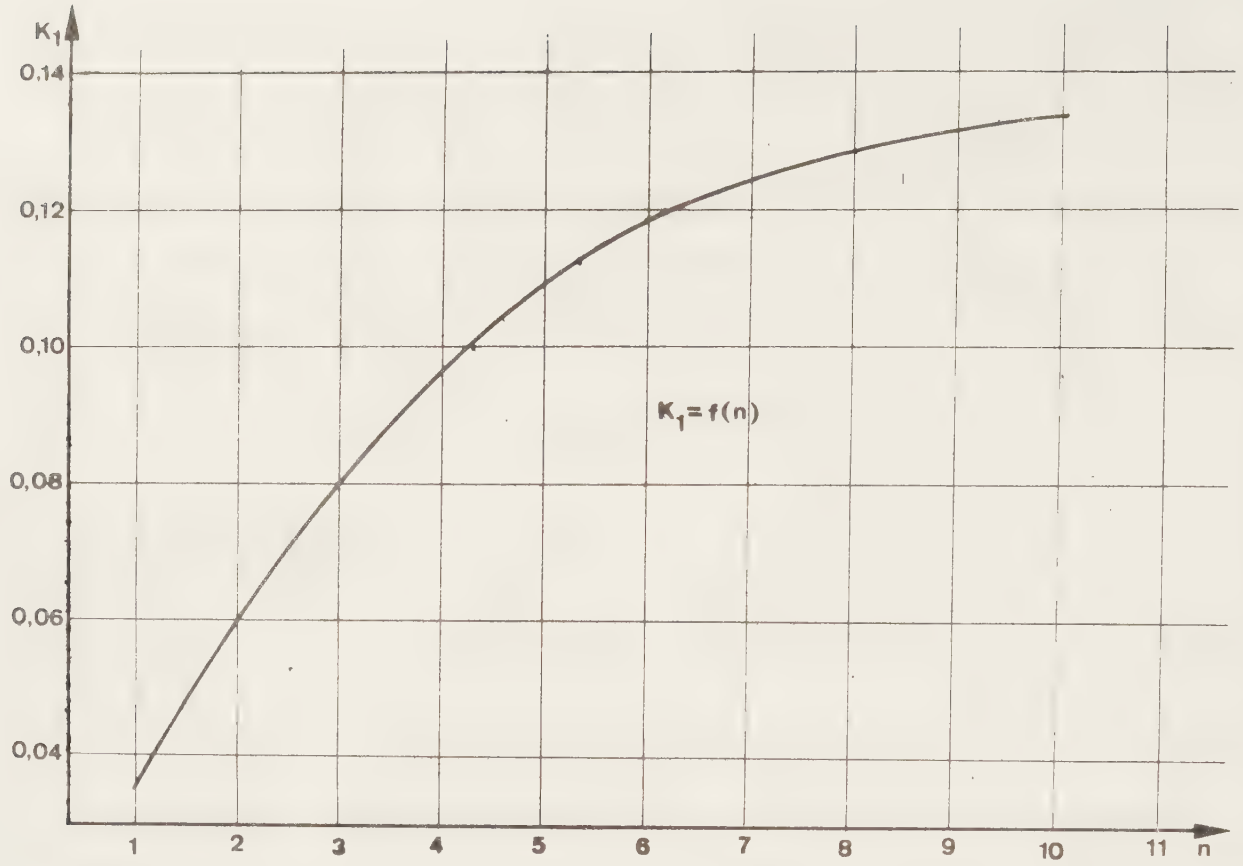
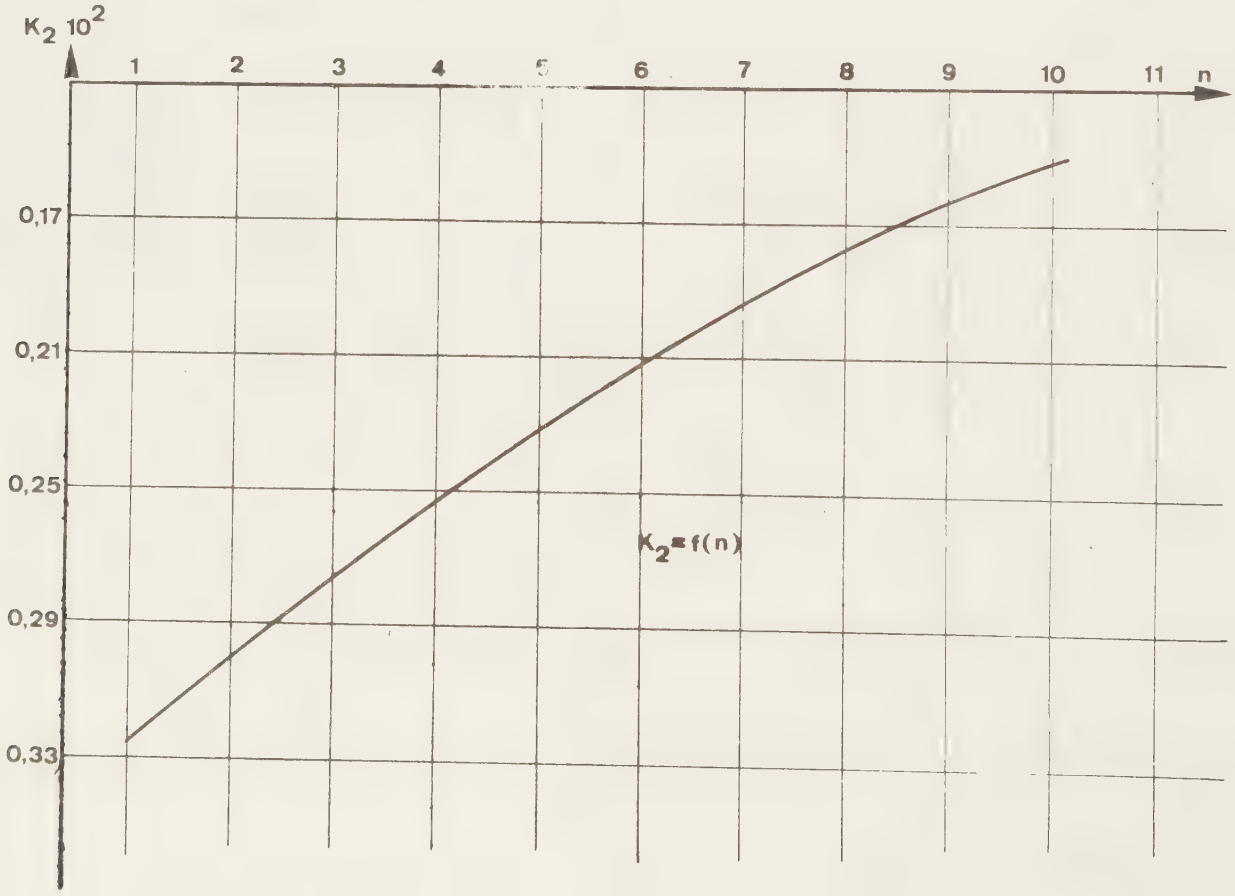


FIGURE 38 - Variations des coefficients K_1 et K_2 en fonction du nombre n de raidisseurs.



RECHERCHE THEORIQUE DU POIDS MINIMUM

POUR L'ENSEMBLE PLAQUE RAIDISSEUR CHARGE PAR UNE PRESSION CONSTANTE

-:-:-:-:-:-:-:-

1.4.1 - FLECHE MAXIMUM IMPOSEE

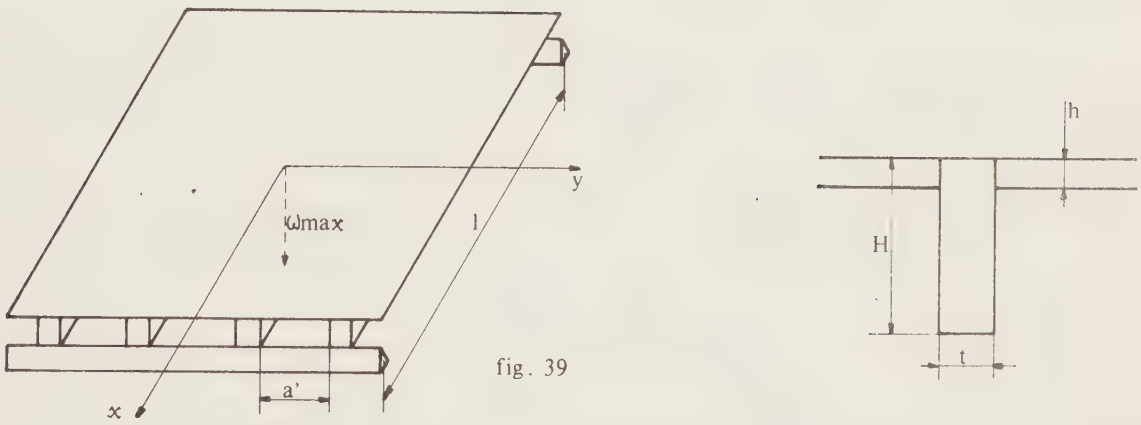


fig. 39

Nous nous proposons de déterminer le poids minimum d'une plaque avec raidisseurs devant supporter une charge constante, uniformément répartie, de densité q par unité de surface. Cette plaque repose sur des appuis simples distants de l , les deux autres bords sont libres, mais leur distance est telle que la plaque peut être considérée comme en flexion cylindrique.

La flèche maximum ωmax au centre de l'intervalle limité par deux raidisseurs est imposée.

Les grandeurs à déterminer sont :

- h épaisseur de la plaque
- t largeur des raidisseurs
- H hauteur des raidisseurs
- a' écartement des raidisseurs

Ces dimensions peuvent être exprimées à partir des coefficients sans dimensions suivants :

$$k = \frac{t}{H}$$

$$\beta = \frac{\pi a'}{2l}$$

$$\lambda = \frac{EI^*}{lD} = \frac{tH^3(1-\nu^2)}{lh^3}$$

les valeurs connues ou imposées sont :

$$l \quad , \quad q \quad \text{et} \quad \omega\,max$$

les valeurs recherchées sont :

α , β , λ et l'une quelconque des valeurs h , t ou H .

Pour calculer le poids minimum de l'ensemble plaque-raidisseurs, nous pouvons procéder en deux étapes

1°) Déterminer le poids minimum des raidisseurs seuls

2°) En déduire le poids minimum pour l'ensemble raidisseurs + plaque

Pour effectuer le premier calcul, nous pouvons constater, que pour une plaque d'épaisseur h connue, lorsque les quantités $\omega\,max$, q et l sont imposées, le coefficient α est déterminer par la relation

$$\omega\,max = \alpha \frac{q l^4}{D} \qquad \text{avec} \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

nous disposons par ailleurs du graphe $\alpha(\lambda)$ pour toutes les valeurs de β .

(Dans un but de simplification, nous avons représenté ce graphe en prenant, sur les deux axes, des échelles logarithmiques. Les courbes représentatives tendent vers des droites pour les valeurs de β inférieures à 0,392).

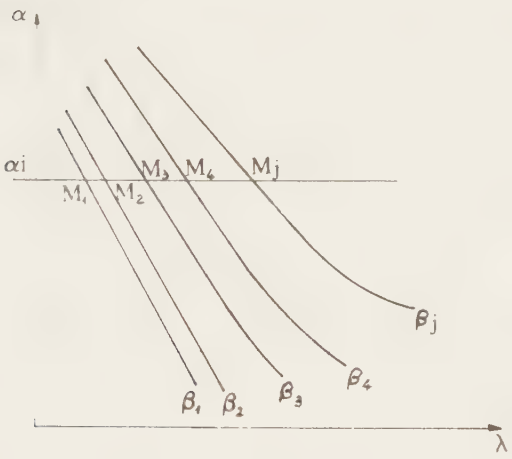


fig. 40

Soit α_i la valeur du coefficient correspondant à une valeur particulière de h .

En reportant cette valeur α_i sur le graphe $\alpha(\lambda)$ on obtient une infinité de solutions. Chacune d'elles étant caractérisée par une valeur de β et une valeur de λ (points Mj).

Nous pouvons calculer, pour chacun de ces points, le poids des raidisseurs et l'exprimer en fonction de β et λ .

<u>Surface d'une section droite d'un raidisseur en fonction de λ et du rapport</u> $k = \frac{t}{H}$

$$\lambda = \frac{t H^3 (1-\nu^2)}{l h^3}$$

$$k = \frac{t}{H}$$

$$\lambda = \frac{k H^4 (1-\nu^2)}{l h^3}$$

soit :

$$H^4 = \frac{l h^3 \lambda}{k (1-\nu^2)}$$

La section droite d'un raidisseur a pour surface :

$$S = H \cdot t$$

soit :

$$S = k H^2$$

$$S = \sqrt{\frac{k l h^3 \lambda}{1-\nu^2}} .$$

si n désigne le nombre de raidisseurs, la section totale aura pour valeur :

$$S_R = S \cdot n = n \sqrt{\frac{k l h^3}{1-\nu^2}} \cdot \sqrt{\lambda} \qquad (82)$$

Pour représenter les courbes de variations S_R (λ) nous pouvons choisir des échelles logarithmiques

$$\log S_R = \log \left[n \sqrt{\frac{k l h^3}{1-\nu^2}} \right] + \frac{1}{2} \log \lambda$$

avec n = 1 , 2 , 3 , 4 .....

Les variations de S_R (λ) sont représentées par un réseau de droites parallèles, chacune d'elles correspondant à une valeur particulière de n .

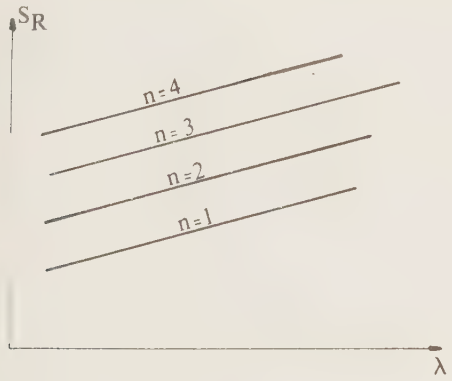


fig. 41

Posons $\psi = \sqrt{\frac{k l h^3}{1-\nu^2}}$

Pour deux valeurs différentes de ψ nous obtenons deux réseaux identiques, pouvant se superposer par un changement d'origine des ordonnées.

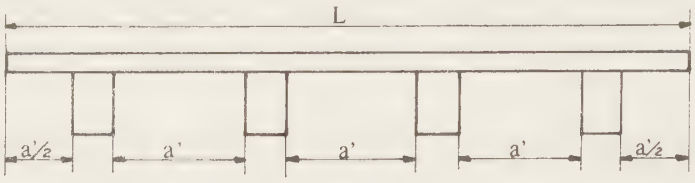
En effet, supposons que ψ prenne la valeur $m\psi$, nous aurons

$$\log S_R = \log (n m \psi) + \frac{1}{2} \log \lambda$$

soit $$\log S_R = \log m + \log n\Psi + \frac{1}{2}\log\lambda$$

qui correspond à un changement d'origine des ordonnées de valeur log m par rapport au réseau initial (m = 1)

Pour exprimer la quantité S_R en fonction de $\beta = \frac{na'}{2l}$, nous supposons que les raidisseurs sont équidistants et que la distance séparant les deux derniers des bords libres de la plaque est égale à la moitié de a'



$$\beta' = \frac{na'}{2l}$$

soit $$a' = \frac{2l\beta}{n}$$

Nous nous proposons de faire le calcul d'optimisation en prenant pour longueur L :

$$L = l + n\,t$$

qui correspond approximativement à une maille carrée pour la plaque

$$n\,a' = l$$

$$n = \frac{l}{a'} = \frac{n}{2\beta}$$

Nous pouvons ainsi graduer le réseau des droites $S_R(\lambda)$ en fonction de β

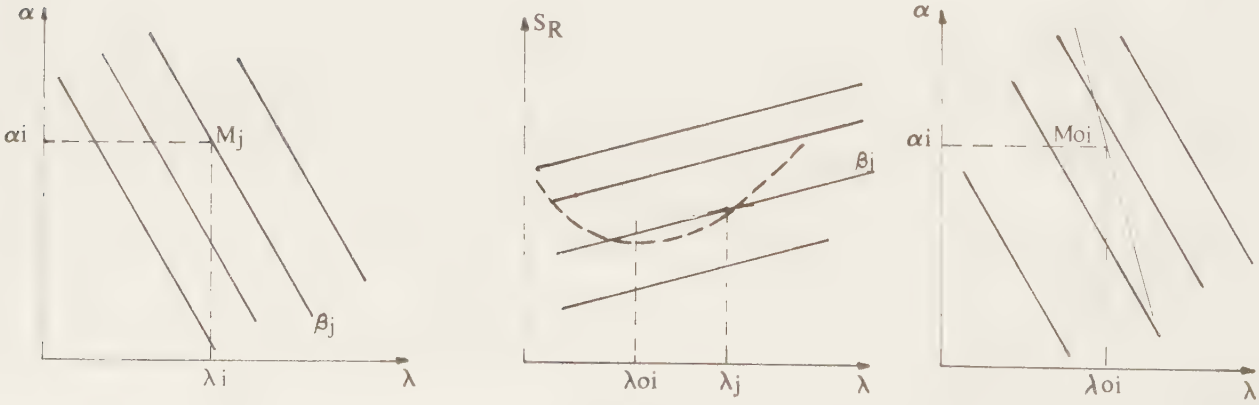


fig. 42

Nous avons montré précédemment que pour une valeur déterminée α_i on obtenait

une infinité de solutions correspondant aux points Mj . Chacun de ces points étant caractérisé par les valeurs λj et βj .

Reportons la valeur λj sur le graphe S_R (λ), nous obtenons sur la droite repérée βj , un point correspondant au poids des raidisseurs.

En répètant l'opération pour chacun des points M j , nous pouvons tracer la courbe correspondant aux variations de S_R en fonction de λ pour une valeur α_i déterminée. Le minimum de cette courbe donne la valeur λ_{oi} - valeur optimum de correspondant à α_i

Ainsi, pour une valeur de α_i donnée, le poids des raidisseurs est minimum pour la valeur de $\lambda = \lambda_{oi}$. Parmi toutes les solutions initiales M j , il convient donc de choisir le point M_{oi} (α_i, λ_{oi}).

On remarque que λ_{oi} est indépendant de la valeur ψ

En reprenant cette construction pour différentes valeurs de α_i nous obtenons sur le graphe α (λ), le lieu des points correspondant au poids minimum des raidisseurs.

On constate que ce lieu est une droite représentée sur le graphe n° 44

<u>Détermination du poids minimum pour l'ensemble plaque-raidisseurs</u>

La section droite d'un raidisseur a pour valeur :

$$S = \sqrt{\frac{k l h^3}{1-\nu^2}} \sqrt{\lambda}$$

pour n raidisseurs :

$$S_R = n S = n \sqrt{\frac{k l h^3}{1-\nu^2}} \sqrt{\lambda}$$

à cette quantité, nous devons ajouter la section droite de la plaque comprise entre les raidisseurs. Pour n raidisseurs, nous avons vu que la longueur de cette plaque était égale à l . La section droite totale aura donc pour valeur

$$S_T = n \sqrt{\frac{k l h^3}{1-\nu^2}} \cdot \sqrt{\lambda} + l h \qquad (83)$$

Le volume total de matière ayant pour valeur

$$V_T = S_T \cdot l$$

Nous avons déterminé pour quelles valeurs de n , λ et α , le premier terme de l'expression S_T était minimum. Points situés sur la droite de poids minimum.

La valeur du coefficient $k = \frac{t}{H}$ étant choisie à priori (cette valeur du coefficient k doit être la plus petite possible compatible avec le non-déversement du raidisseur). Nous pouvons donc exprimer S_T en fonction de n λ et α et pour cela, déterminer la valeur de h en fonction de α

nous avons
$$\omega_0 = \alpha \frac{q l^4}{D}$$

avec ω_0 flèche maximum au centre de la plaque

et
$$D = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)}$$

ainsi
$$\omega_0 = \alpha \frac{q l^4}{\frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)}}$$

donne
$$h^3 = \frac{12 \alpha q l^4 (1-\nu^2)}{E \omega_0}$$

En reportant cette valeur de h dans l'expression de S_T nous obtenons :

$$S_T = n \sqrt{\alpha \lambda} \cdot \sqrt{\frac{12 k l^5 q}{E \omega_0}} + l \sqrt[3]{\frac{12 q l^4 (1-\nu^2)}{E \omega_0}} \sqrt[3]{\alpha} \qquad (84)$$

posons
$$A = \sqrt{\frac{12 q l^5 k}{E \omega_0}}$$
$$B = \sqrt[3]{\frac{12 q l^4 (1-\nu^2)}{E \omega_0}} \qquad (85)$$

Ces coefficients A et B ont la dimensions d'une surface et sont déterminés par les données initiales q , l , ω_0 et k .

Ainsi
$$\frac{V_T}{l} = S_T = A \cdot n \sqrt{\alpha \lambda} + B \sqrt[3]{\alpha} \qquad (86)$$

ou
$$\frac{V_T}{A l} = n \sqrt{\alpha \lambda} + \frac{B}{A} \sqrt[3]{\alpha} \qquad (87)$$

pour chaque valeur de α nous déterminons les valeurs de n et λ correspondant au point situé sur la droite de poids minimum des raidisseurs.

Nous obtenons ainsi une courbe de variations du terme $n \sqrt{\alpha \lambda}$ en fonction de α

A cette expression, nous ajoutons $\frac{B}{A} \sqrt[3]{\alpha}$ et obtenons ainsi un réseau de courbes permettant de déterminer la zone de poids minimum pour l'ensemble plaque-raidisseurs (graphe n° 45)

Conclusion

Méthode d'application des résultats

On dispose des graphes $\alpha(\lambda)$ et $\frac{V_T}{Al}(\alpha)$ représentés pages 74 et 75 on choisit k minimum compatible avec les conditions de non-deversement des raidisseurs.

Les quantités q , l , E , ω_0 étant connues ou imposées, on calcule les coefficients

$$A = \sqrt{\frac{12\, q l^5 k}{E\, \omega_0}}$$

et

$$B = \sqrt[3]{\frac{12\, q l^4 (1-\nu^2)}{E\, \omega_0}}$$

ainsi que le rapport $\frac{B}{A}$

On recherche sur le graphe $\frac{V_T}{Al}$ la courbe correspondant à la valeur $\frac{B}{A}$ ainsi obtenue. Le minimum de cette courbe permet de déterminer la valeur de α_{op} à adopter.

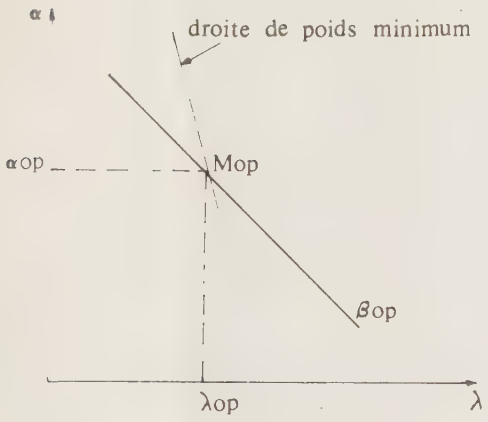


fig. 43

Sur le graphe $\alpha(\lambda)$ l'intersection de la droite d'ordonnée α_{op} avec la droite de poids minimum, détermine la valeur de λ_{op}

Les courbes $\alpha(\lambda)$ sont graduées en valeurs de β . Celle qui passe par le point M_{op} permet d'obtenir la valeur β_{op} .

Tous les paramètres définissant les dimensions de la plaque sont ainsi déterminés.

1.4.2 - CONTRAINTE MAXIMUM IMPOSEE

Introduction

Dans le paragraphe précédent, l'optimisation des dimensions de la plaque a été effectuée en cherchant à minimiser le poids total. Lorsque la plaque supporte une charge uniformément répartie, et accuse sous cette charge une flèche maximum imposée.

Un autre mode de calcul peut être effectué en se fixant sous charge donnée une contrainte maximum limite à ne pas dépasser.

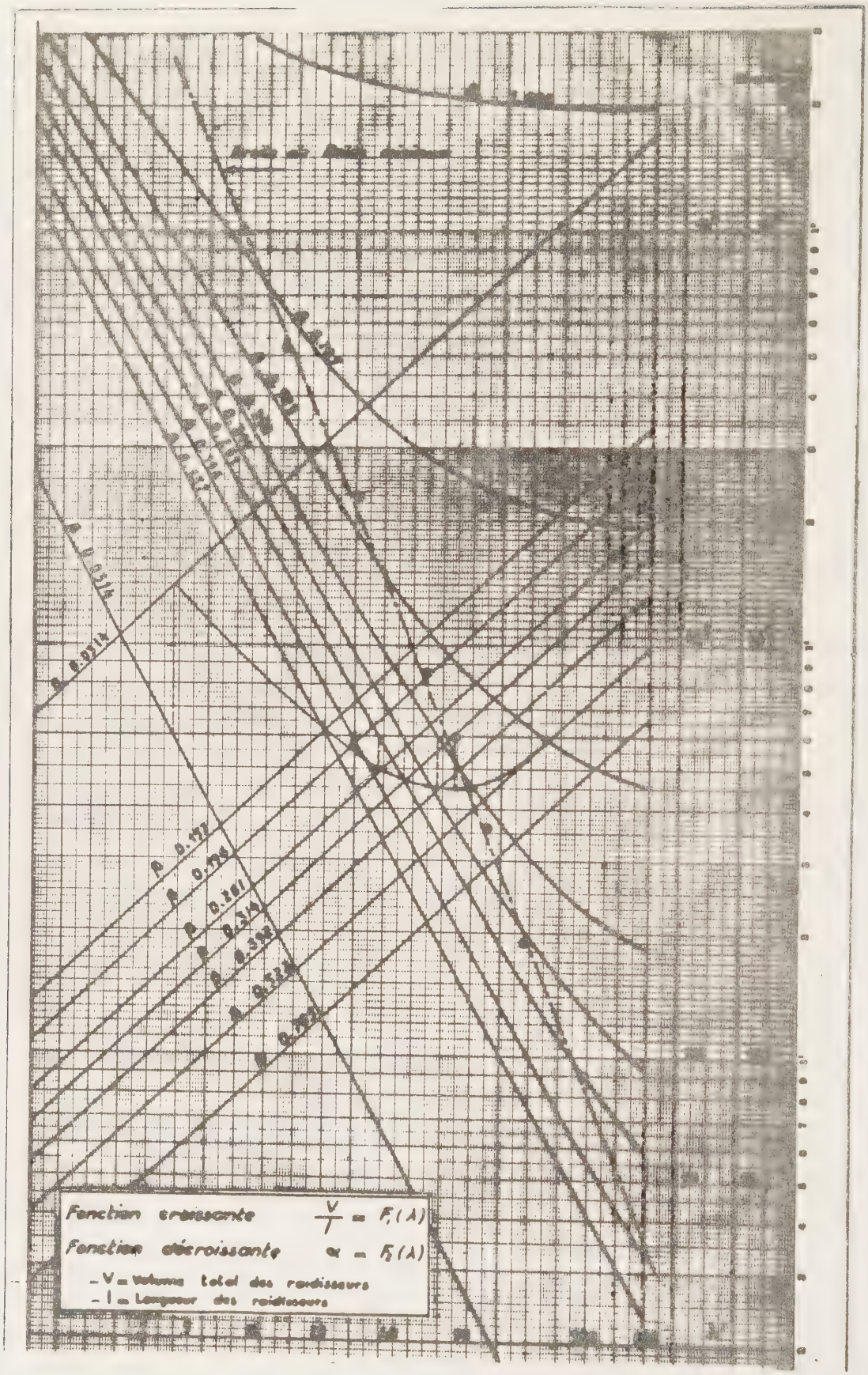


FIGURE 44 - Variation du coefficient α en fonction de $\lambda = \frac{EI^*}{lD}$
Droite de poids minimum

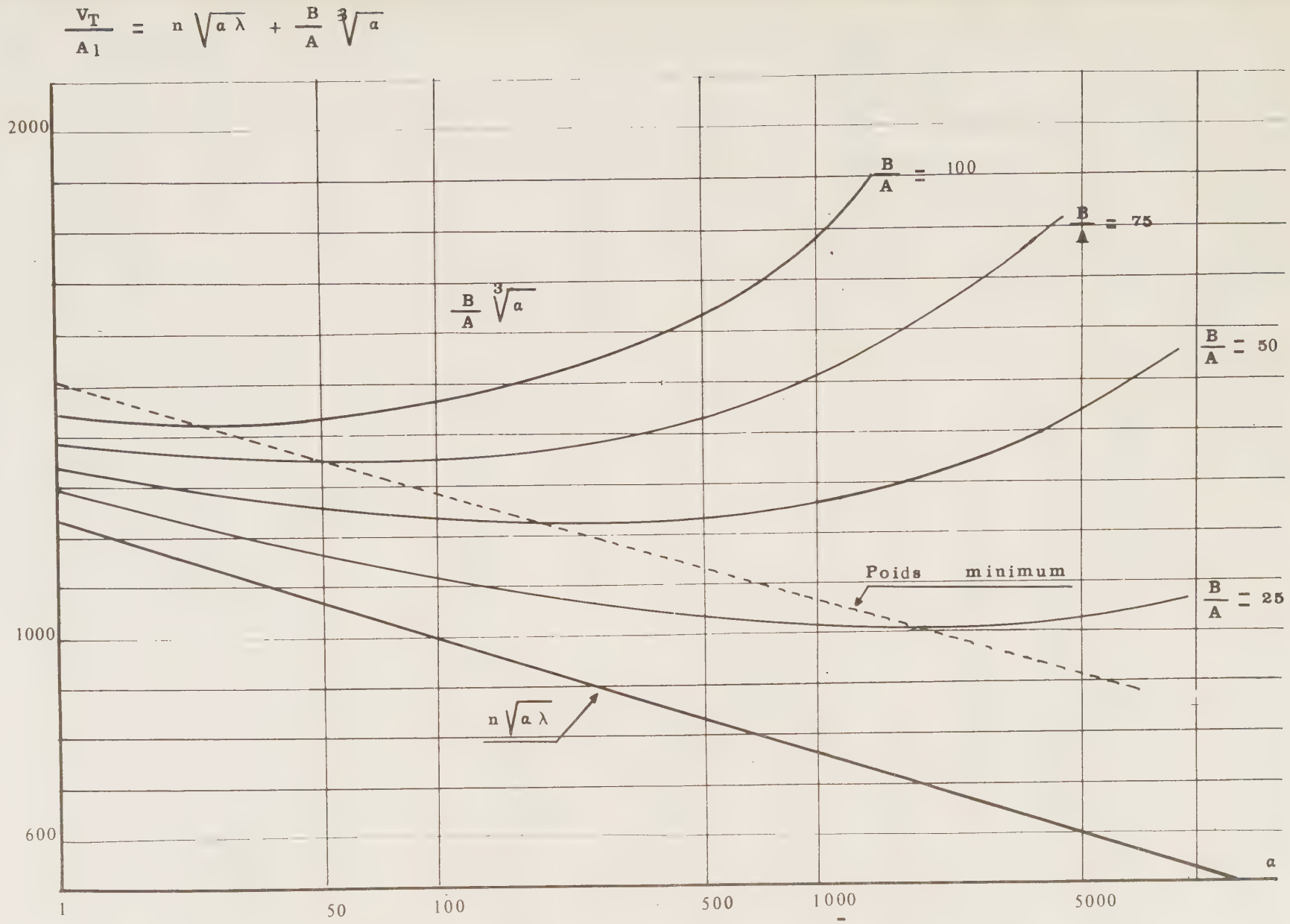


FIGURE 45 - Variations du poids total de la plaque en fonction des paramètres a et $\frac{B}{A}$

Une étude des coefficients précédemment cités et définissant les moments de flexion dans la plaque, montre que la contrainte normale maximum, qui est par ailleurs une contrainte principale, s'exerce au droit du raidisseur et au milieu de celui-ci.

Pour le raidisseur, la contrainte principale maximum s'exerce également au centre du raidisseur, sur les fibres les plus éloignées de l'axe neutre.

La paragraphe suivant est consacré au calcul de ces contraintes principales.

1.4.2.1 - Détermination des contraintes maxima

- Dans la plaque -

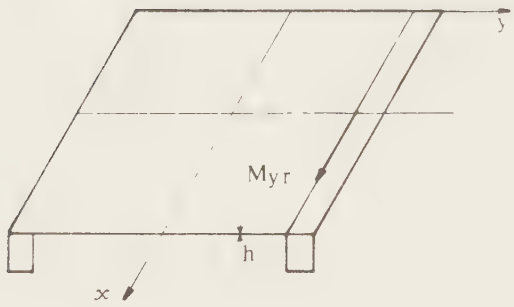


fig. 46

La contrainte maximum dans la plaque est donnée par les relations établies au paragraphe 1.3.4.2.

$$\sigma_Y = \pm \frac{6}{h^2} \alpha_Y \cdot q_1 l^2$$

Au voisinage du raidisseur cette contrainte atteint son maximum

$$\sigma_p = \sigma_{Yr} = \pm \frac{6}{h^2} \alpha_{Yr} q_1 l^2 \qquad (88)$$

- Dans le raidisseur -

Les moments de flexion s'exerçant dans la plaque ont pour valeur (76)

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

Ce système d'équations donne :

$$D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = - \left[\frac{M_x - \nu M_y}{1 - \nu^2} \right] \qquad (89)$$

La courbure du raidisseur et de la plaque étant identique tout le long du raidisseur, le moment de flexion qui s'exerce dans ce dernier aura pour valeur :

$$M_f = - EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

d'où la valeur du moment maximum

$$M_f = \frac{EI}{D} \cdot \frac{M_{xr} - \nu M_{yr}}{1 - \nu^2}$$

soit en remplaçant M_{xr} et M_{yr} par leurs valeurs

$$M_{xr} = \alpha_{xr}\, q l^2$$

$$M_{yr} = \alpha_{yr}\, q l^2$$

il vient

$$M_f = \frac{EI}{D}\,\frac{\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr}}{1-\nu^2}\, q l^2 \qquad (90)$$

La contrainte normale maximum s'exerçant sur les fibres les plus éloignées de l'axe neutre a pour expression

$$\sigma_r = \frac{M_f \cdot \eta H}{I} \qquad (91)$$

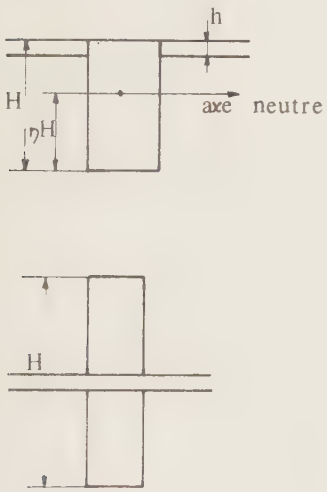


fig. 47

η étant un coefficient qui est fonction de la position de l'axe neutre.

Dans le cas d'un raidisseur symétrique ou d'un raidisseur non solidaire de la plaque

$$\eta = \frac{1}{2}$$

Dans le cas général où une certaine partie de la plaque participe à la flexion, nous aurons

$$\frac{1}{2} < \eta < 1$$

La contrainte maximum dans le raidisseur a pour valeur

$$\sigma_r = \frac{E\eta H}{D} \cdot \frac{\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr}}{1-\nu^2}\, q l^2$$

que nous pouvons écrire avec

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\sigma_r = \frac{12\eta H}{h^3}\,(\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr})\, q l^2 \qquad (92)$$

le dimensionnement optimal de la plaque est obtenue lorsque les contraintes maxima s'exerçant dans la plaque et dans le raidisseur sont égales à la contrainte limite σl

$$\sigma_r = \sigma_p = \sigma l$$

soit

$$\sigma l = \frac{6}{h^2}\,\alpha_{yr}\, q l^2 = \frac{12\eta H}{h^3}\,(\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr})\, q l^2 \qquad (93)$$

et

$$\frac{H}{h} = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\alpha_{yr}}{\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr}} \qquad (94)$$

Ces deux expressions (93) et (94) permettent de déterminer les dimensions h et H

(93) $$h^2 = \frac{6ql^2}{\sigma_l} \cdot \alpha_{yr}$$

soit $$h = Q\sqrt{\alpha_{yr}} \qquad \text{avec} \qquad Q = \sqrt{\frac{6ql^2}{\sigma_l}} \tag{95}$$

d'où $$H = \frac{Q\,\alpha_{yr}\sqrt{\alpha_{yr}}}{2\eta\,(\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr})} \tag{96}$$

la largeur t du raidisseur est directement obtenue à partir de la valeur du coefficient de rigidité relative λ

$$\lambda = \frac{EI^*}{lD}$$

en remplaçant I et D par leurs valeurs respectives

$$\lambda = \frac{tH^3(1-\nu^2)}{lh^3}$$

soit

$$t = \frac{l\lambda}{1-\nu^2} \cdot \frac{h^3}{H^3}$$

ce qui donne, compte tenu de (94)

$$t = \frac{l\lambda}{1-\nu^2} \cdot \left[\frac{2\eta\,(\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr})}{\alpha_{yr}}\right]^3 \tag{97}$$

La section droite perpendiculaire à l'axe des raidisseurs a pour surface

$$S = \quad = n\,H\,t + h\,l$$

- n représentant le nombre de raidisseurs
- V le volume total de matière
- Le calcul d'optimisation est effectué comme dans le paragraphe précédent pour une longueur de plaque L

$$L = l + n\,t$$

En reportant dans l'équation donnant S les valeurs établies, nous obtenons

$$\frac{V}{l} = n \frac{Q\alpha_{yr}\sqrt{\alpha_{yr}}}{2\eta(\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr})} \cdot \left[\frac{2\eta(\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr})}{\alpha_{yr}}\right]^3 \frac{l\lambda}{1-\nu^2} + Ql\sqrt{\alpha_{yr}}$$

soit après simplification :

$$\frac{V}{Ql^2} = n\sqrt{\alpha_{yr}}\left[\frac{2\eta(\alpha_{xr} - \nu\alpha_{yr})}{\alpha_{yr}}\right]^2 \frac{\lambda}{1-\nu^2} + \sqrt{\alpha_{yr}} \qquad (98)$$

Les coefficients α_{xr} et α_{yr} sont donnés en fonction des paramètres λ et β dans le tableau n° 3

Le graphe représenté figure (48) indique les variations $\frac{V}{Ql^2}$ (n) pour différentes valeurs de λ et pour $\eta = \frac{1}{2}$

On peut noter que le second terme $\sqrt{\alpha_{yr}}$ de l'expression de $\frac{V}{Ql^2}$ est très petit par rapport au premier.

Ainsi, la valeur $\frac{V}{Ql^2}$ est proportionnelle à $(2\eta)^2$

Pour une valeur de η comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, la valeur de $\frac{V}{Ql^2}$ sera donc directement obtenue à partir du graphe n° 48 donnant $\frac{V}{Ql^2}$ pour $\eta = \frac{1}{2}$, en multipliant l'échelle des ordonnées par la quantité $(2\eta)^2$

1.4.2.2 - <u>Méthode d'application des résultats</u>

On dispose des graphes

$$\frac{V}{Ql^2}(n)$$

$$\left(\frac{V}{Ql^2}\right)_{mini}(n)$$

$$\frac{h}{\sqrt{\frac{6ql^2}{\sigma l}}}(n)$$

$$\frac{t(1-\nu^2)}{l(2\eta)^3}(n)$$

$$\frac{h}{H(2\eta)}(n)$$

Le graphe $\frac{V}{Ql^2}$ montre que le poids total de l'ensemble plaque-raidisseurs diminue lorsque les paramètres λ et n augmentent.

On choisit une valeur de λ_0 située au voisinage des valeurs maxima, le

graphe $\frac{V}{Ql^2}$ (n) permet, en prenant le minimum de la courbe repérée λ_o , de déterminer la valeur de $n = n_o$

Cette valeur n_o reportée sur le graphe $\frac{h}{\sqrt{\frac{6ql^2}{\sigma_1}}}$ (n) détermine h pour la valeur λ_o choisie initialement.

Le graphe $\frac{h}{H(2\eta)}$ donne (pour les mêmes valeurs n_o , λ_o) le rapport $\frac{h}{H}$ en fonction du paramètre η ce qui parmet de calculer les deux valeurs limites de H.

valeur minimum pour $\eta = 1$

valeur maximum pour $\eta = \frac{1}{2}$

le graphe $\frac{t(1-\nu^2)}{l(2\eta)^3}$ défini les valeurs maxima et minima de t en fonction de n_o et λ_o

Si les valeurs obtenues sont incompatibles avec les impératifs de construction, ou certaines conditions de déversement des raidisseurs, on reprend une valeur de λ plus faible que celle initialement choisie.

FIGURE 48 - Variations du poids total de la plaque en fonction du nombre n de raidisseurs.
Zone de poids minimum pour une valeur de λ donnée

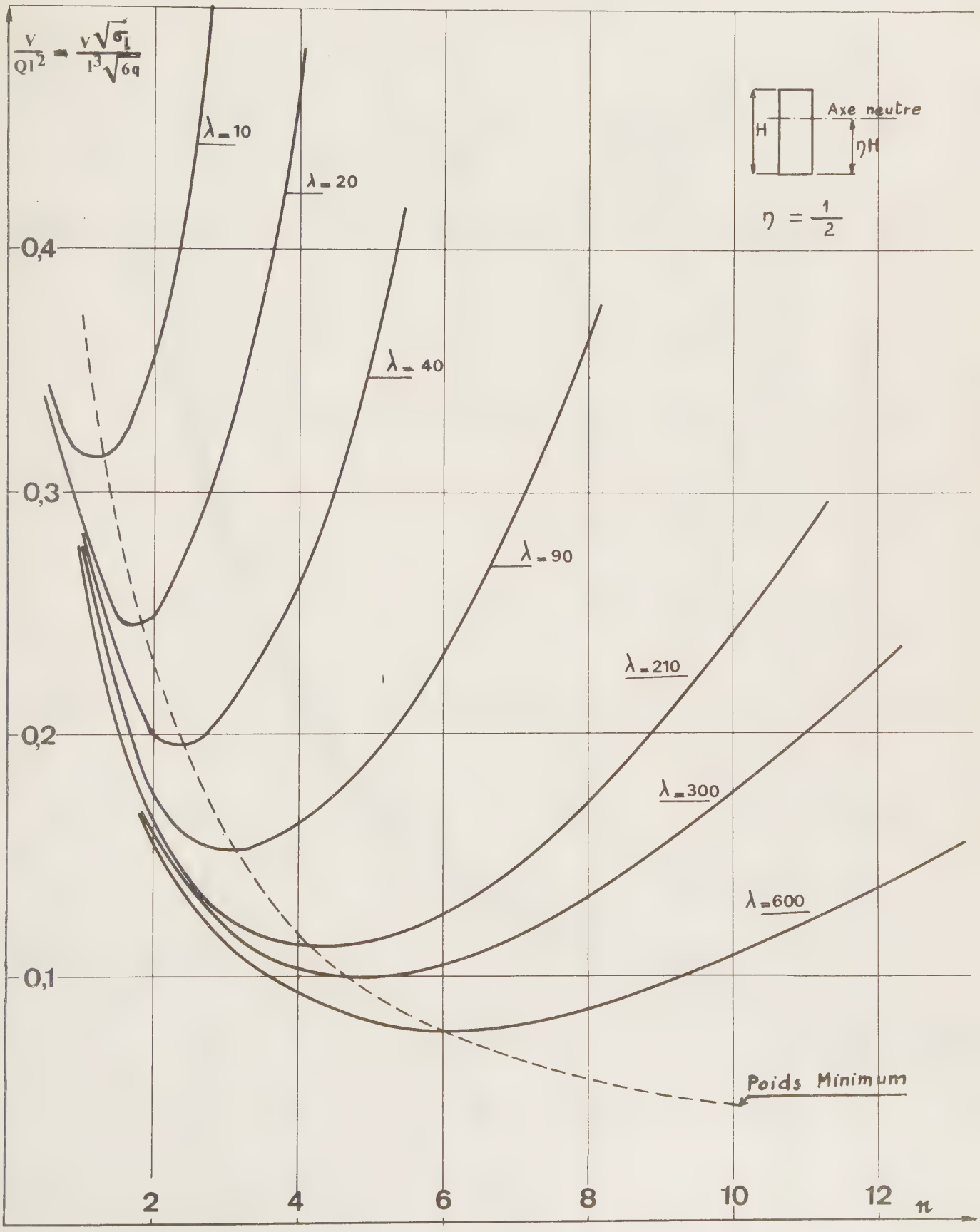


FIG 48

FIGURE 49 - Courbe de poids minimum en fonction du nombre n de raidisseurs pour les valeurs de η limites

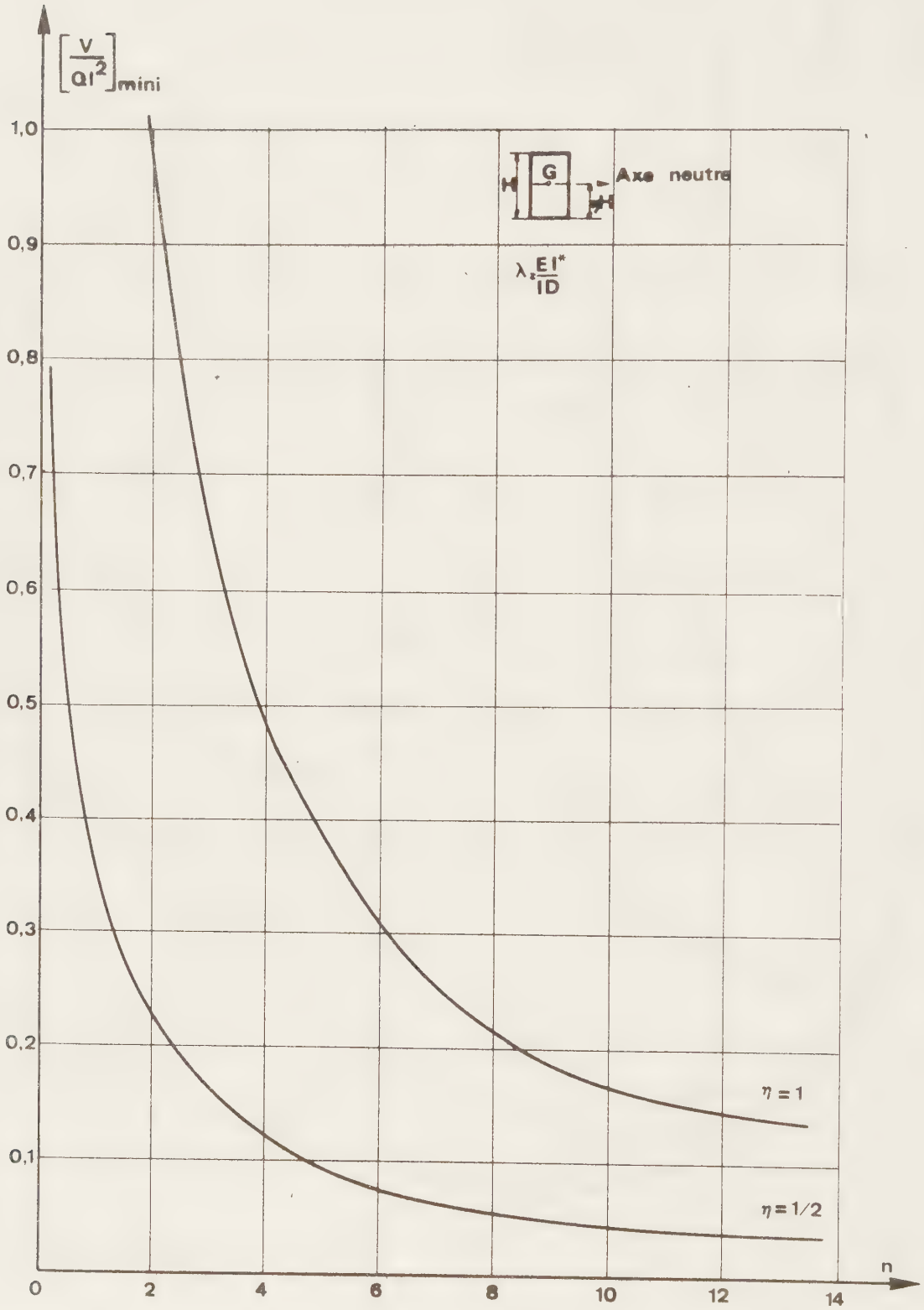


FIG 49

FIGURE 50 - Variations de h en fonction du nombre n de raidisseurs

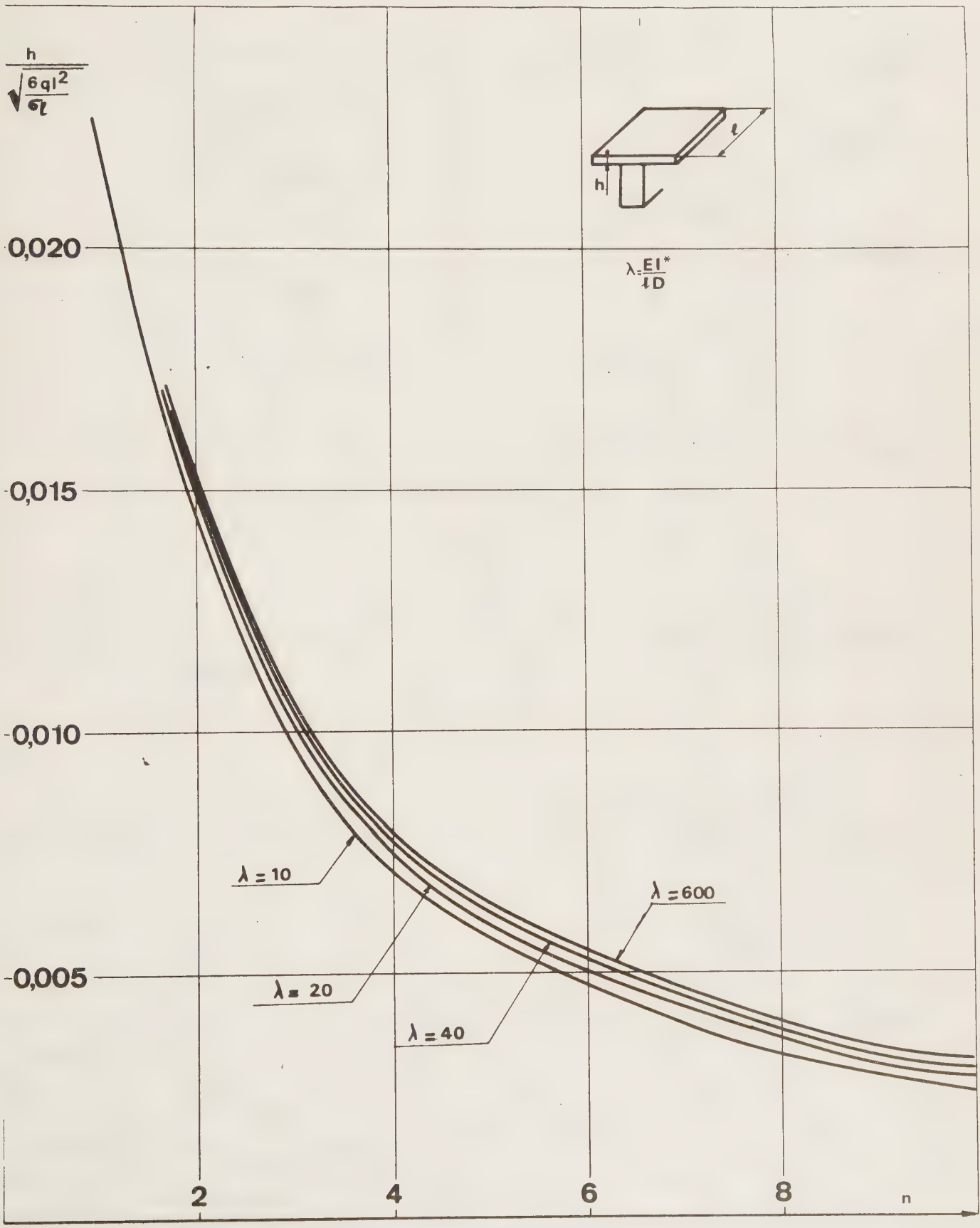


FIG 50

FIGURE 51 - Variations de t en fonction du nombre n de raidisseurs (pour la valeur $\eta = \frac{1}{2}$)

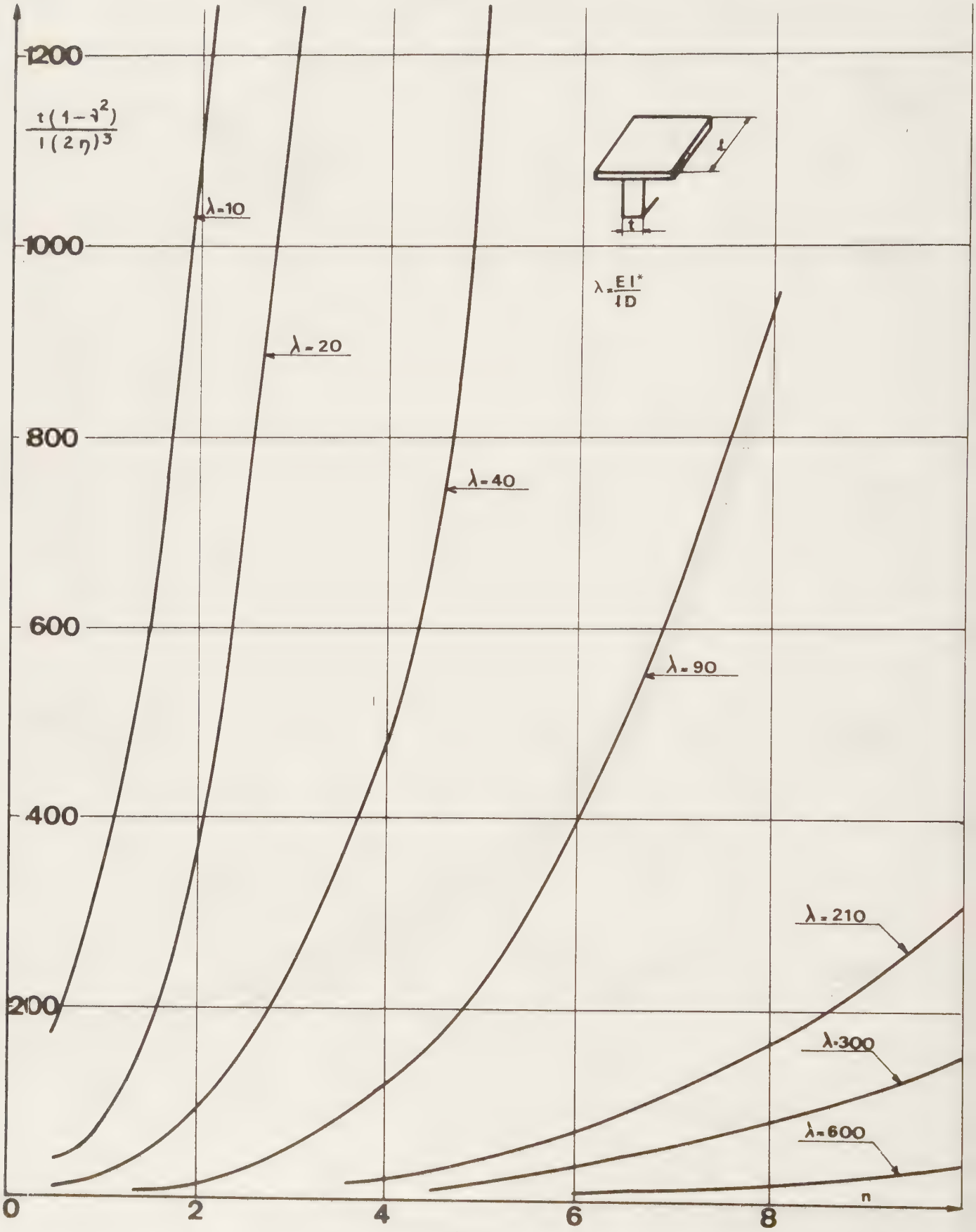


FIG 51

FIGURE 52 - Variations de $\frac{h}{H}$ en fonction du nombre n de raidisseurs (pour la valeur $\eta = \frac{1}{2}$)

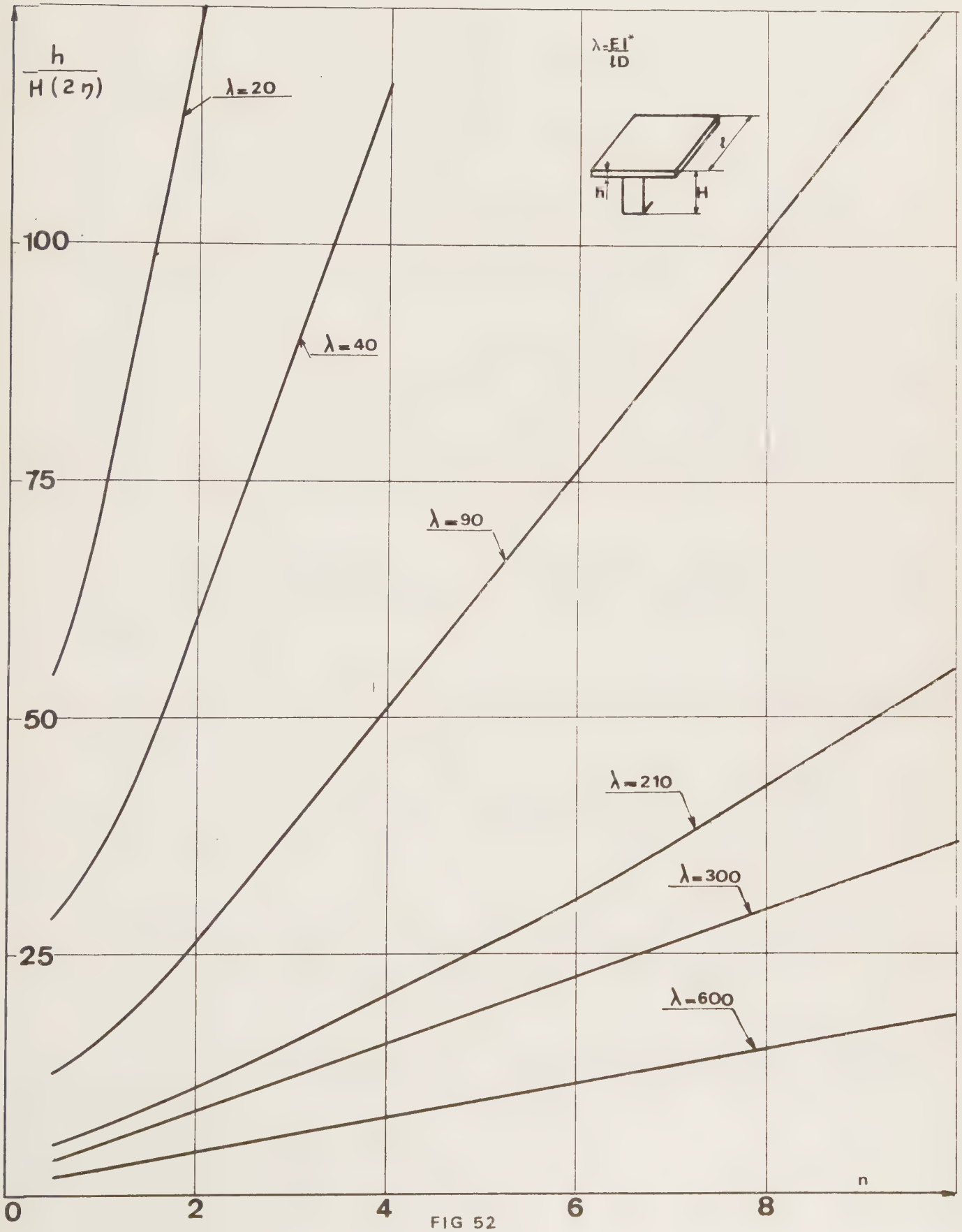


FIG 52

ETUDE EXPERIMENTALE DES PLAQUES SOUS PRESSION CONSTANTE

-:-:-:-:-:-:-:-:-

1.5.1 - GENERALITES SUR L'EXPERIMENTATION DES PLAQUES

1.5.1.1 - Dispositif expérimental de mise en pression uniforme

Les plaques destinées aux essais, sont placées sous une capacité dont la face inférieure est constituée par une membrane en caoutchouc souple destinée à répartir uniformément sur tout le champ d'expérimentation, la pression fournie par la capacité. Les autres parois, sont métalliques et rigides.

Pour les essais dans le domaine élastique, la mise en pression est assurée par une bouteille d'Azote N 48, dont la pression maximum égale 147 bars. La détente du gaz est provoquée par un ensemble de double détente du type PARABLOC (Air Liquide ref. : MDF 131/50). Cet ensemble permet une détente jusqu'à une gamme de pression comprise entre 0 et 2,5 bars. Le débit de l'énsemble a été réduit au maximum par interposition, avant la sortie du deuxième détendeur, d'un feutre destiné à diminuer la vitesse de sortie du gaz.

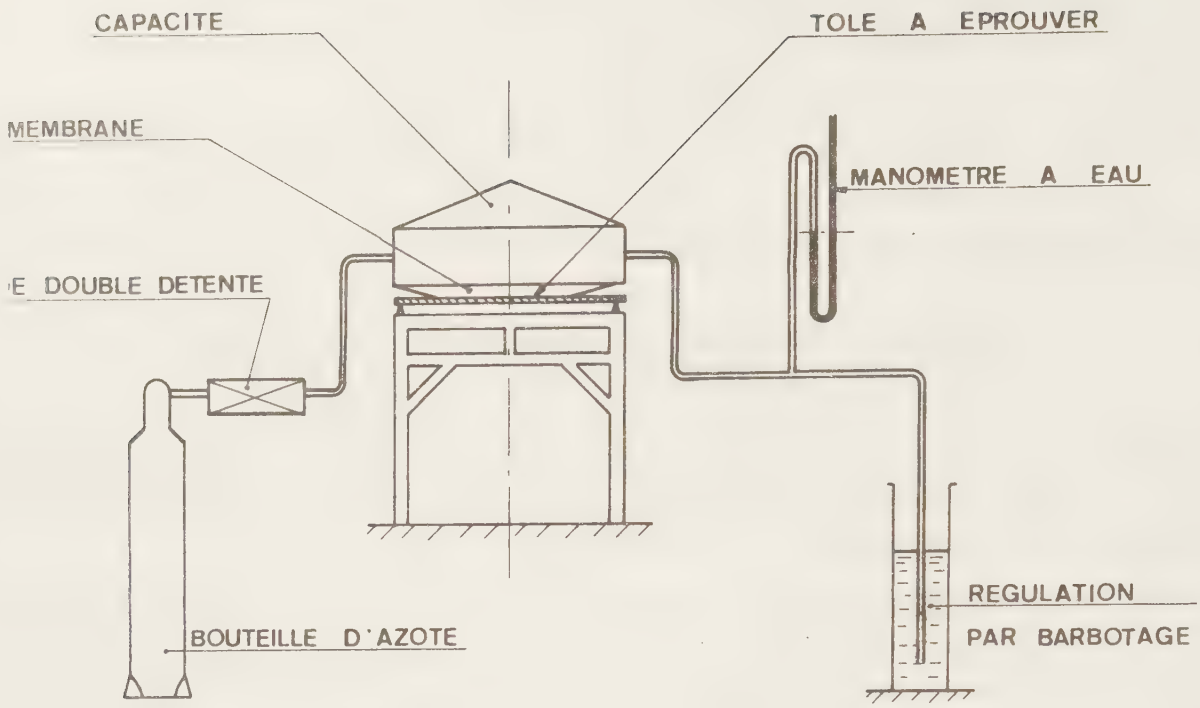
Le volume de la capacité est tel que le passage du courant d'azote destiné à compenser d'éventuelles fuites, ne provoque aucune turbulence propre à amener une variation de pression, en fonction du temps, afin que les mesures soient stables et reproductibles.

Pour les essais dans le domaine plastique, la capacité est directement alimentée en eau sous pression par le réseau urbain. Un système de vannes d'admission et de retour permet d'ajuster la pression.

L'appareil de mesure des pressions est constitué par un manomètre permettant d'évaluer la pression, avec une précision voisine de 2 à 3 %. Le liquide employé est de l'eau, pour les basses pressions, et du mercure, pour les pressions plus élevées.

Pour compenser les fuites de pression qui peuvent se produire,soit aux points de fixation de la membrane, soit aux différents raccords de la tuyauterie souple à la tuyauterie rigide (acier ou verre), il a été prévu un système de barbotage régulateur de pression (voir croquis).

La section du tube de barbotage a été prise assez importante de manière que le dégagement des bulles ne provoque pas de variation sensible de la hauteur de la colonne d'eau.


CAPACITE
TOLE A EPROUVER
MEMBRANE
MANOMETRE A EAU
E DOUBLE DETENTE
REGULATION
PAR BARBOTAGE
BOUTEILLE D'AZOTE

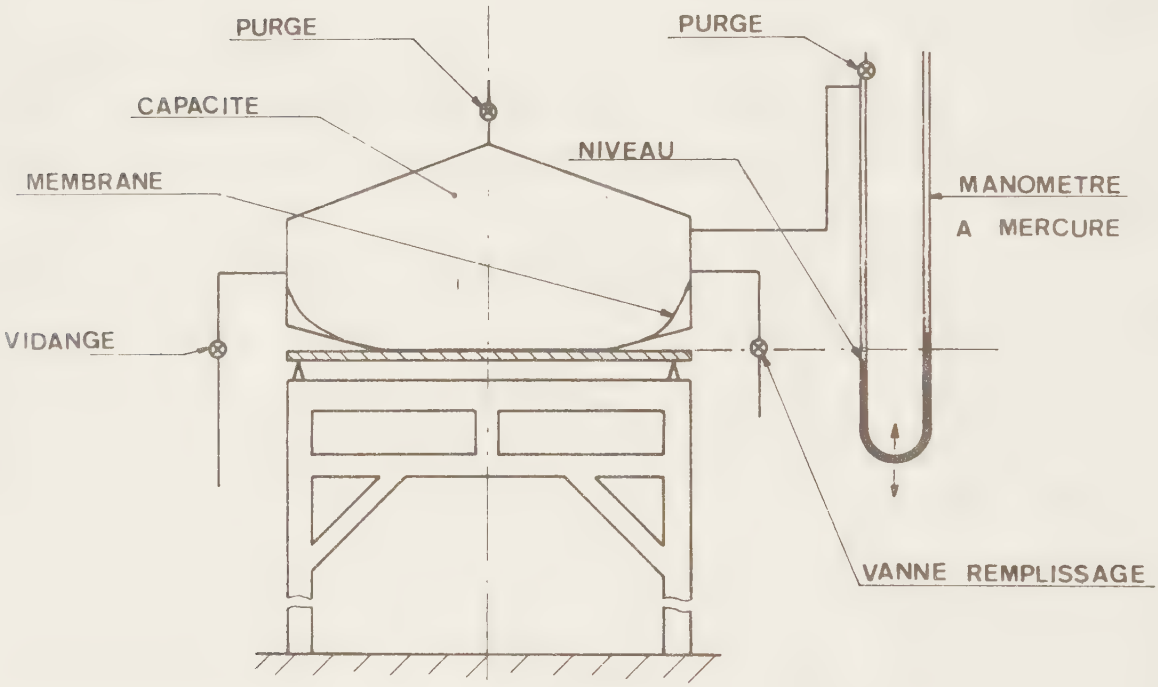

PURGE
PURGE
CAPACITE
NIVEAU
MEMBRANE
MANOMETRE
A MERCURE
VIDANGE
VANNE REMPLISSAGE

fig. 53

ETUDE EXPERIMENTALE DES PLAQUES SOUS PRESSION CONSTANTE

-:-:-:-:-:-:-:-:-

1.5.1 - GENERALITES SUR L'EXPERIMENTATION DES PLAQUES

1.5.1.1 - Dispositif expérimental de mise en pression uniforme

Les plaques destinées aux essais, sont placées sous une capacité dont la face inférieure est constituée par une membrane en caoutchouc souple destinée à répartir uniformément sur tout le champ d'expérimentation, la pression fournie par la capacité. Les autres parois, sont métalliques et rigides.

Pour les essais dans le domaine élastique, la mise en pression est assurée par une bouteille d'Azote N 48, dont la pression maximum égale 147 bars. La détente du gaz est provoquée par un ensemble de double détente du type PARABLOC (Air Liquide ref. : MDF 131/50). Cet ensemble permet une détente jusqu'à une gamme de pression comprise entre 0 et 2,5 bars. Le débit de l'énsemble a été réduit au maximum par interposition, avant la sortie du deuxième détendeur, d'un feutre destiné à diminuer la vitesse de sortie du gaz.

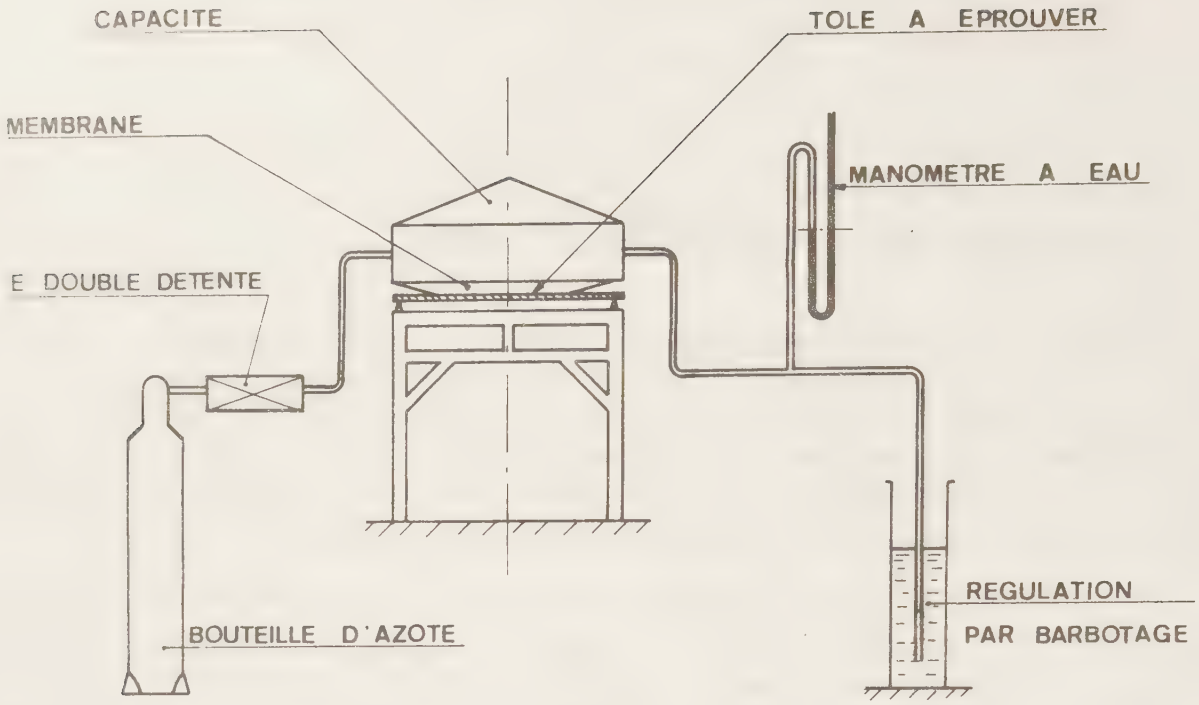
Le volume de la capacité est tel que le passage du courant d'azote destiné à compenser d'éventuelles fuites, ne provoque aucune turbulence propre à amener une variation de pression, en fonction du temps, afin que les mesures soient stables et reproductibles.

Pour les essais dans le domaine plastique, la capacité est directement alimentée en eau sous pression par le réseau urbain. Un système de vannes d'admission et de retour permet d'ajuster la pression.

L'appareil de mesure des pressions est constitué par un manomètre permettant d'évaluer la pression, avec une précision voisine de 2 à 3 %. Le liquide employé est de l'eau, pour les basses pressions, et du mercure, pour les pressions plus élevées.

Pour compenser les fuites de pression qui peuvent se produire,soit aux points de fixation de la membrane, soit aux différents raccords de la tuyauterie souple à la tuyauterie rigide (acier ou verre), il a été prévu un système de barbotage régulateur de pression (voir croquis).

La section du tube de barbotage a été prise assez importante de manière que le dégagement des bulles ne provoque pas de variation sensible de la hauteur de la colonne d'eau.


CAPACITE
TOLE A EPROUVER
MEMBRANE
MANOMETRE A EAU
E DOUBLE DETENTE
REGULATION
PAR BARBOTAGE
BOUTEILLE D'AZOTE

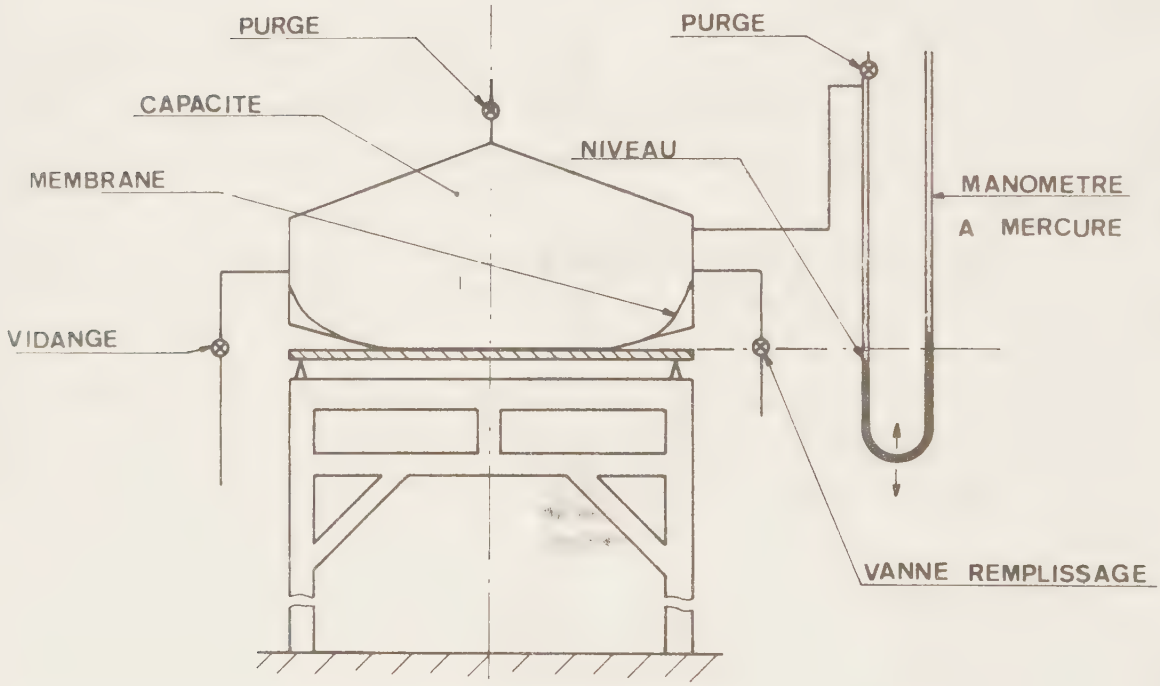
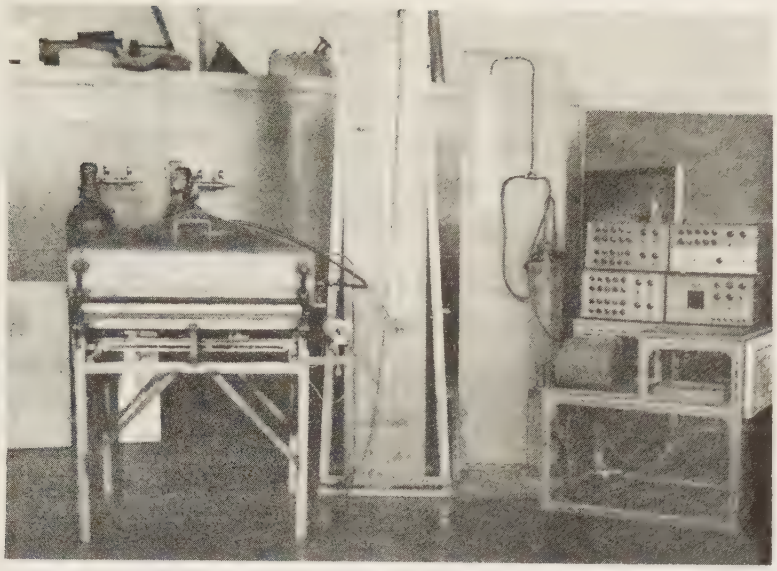

PURGE
PURGE
CAPACITE
NIVEAU
MEMBRANE
MANOMETRE
A MERCURE
VIDANGE
VANNE REMPLISSAGE

fig. 53



DISPOSITIF EXPERIMENTAL

1.5.1.2 - Conditions d'expérimentation des plaques

Conditions aux appuis :

Les appuis sont perpendiculaires aux raidisseurs, et doivent pouvoir se déplacer latéralement afin d'éviter tout glissement de la plaque sur son appui, au cours des mesures de déformations.

Deux systèmes ont été expérimentés :

- Sytème A.

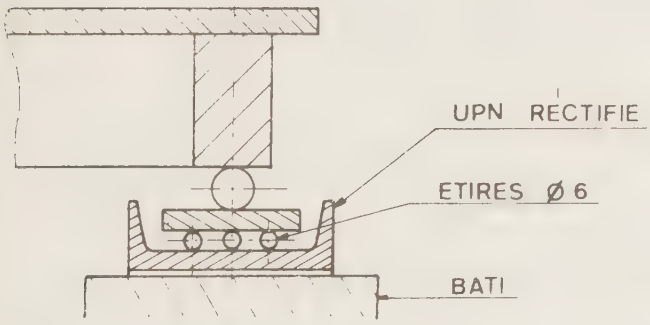


fig. 54

Ce système d'appui, qui semble devoir apporter le meilleur rendement, au point de vue mobilité, mais présente par ailleurs quelques inconvénients. En effet, les empilements successifs des parties mobiles provoquent, lors de la mise sous pression, des tassements aux appuis, incompatibles avec la grandeur des flèches à mesurer (10 à 20 % des flèches).

En outre, ces tassements ne sont pas proportionnels aux charges, mais apparaissent surtout au début de la mise en charge.

- Système B.

Afin de supprimer au maximum les effets de tassement, le système a été réduit à un cylindre d'acier reposant sur un élément du bâti, préalablement rendu plan par grattage et surfaçage.

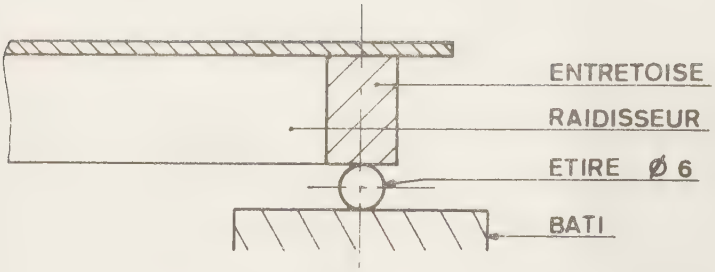


fig.55

Ce sytème supprime la quasi totalité des tassements et les pressions appliquées sont telles qu'il n'y a pas écrasement des génératrices du cylindre aux points de contact avec le bâti ou la plaque.

Conditions aux extrémités des raidisseurs :

Les conditions limites théoriques admises pour le calcul des éléments de plaque compris entre deux raidisseurs sont les suivantes :

- Deux côtés opposés reposant sur appuis simples
- Deux côtés opposés encastrés sur les raidisseurs
- Rotation des raidisseurs nulle

Afin de réaliser un système expérimental reproduisant le plus fidèlement possible ces conditions, des entretoises ont été ajustées entre chaque raidisseur et placées au voisinage du bord libre des plaques.

Ces entretoises, de même hauteur que les raidisseurs, ont également pour but de servir d'appui à la plaque.

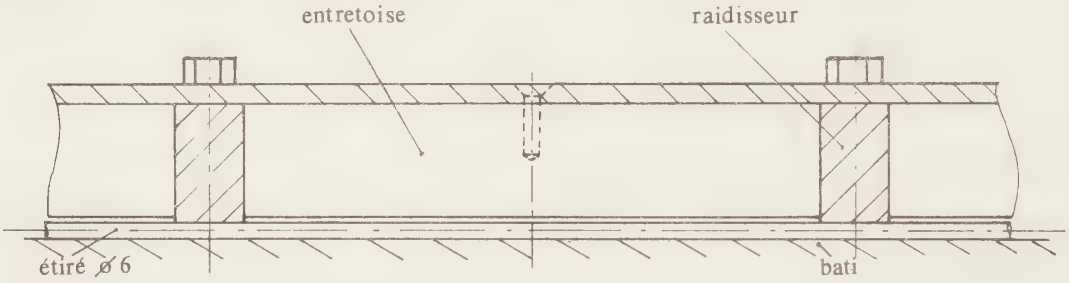


fig.56

Une série d'essais a été effectuée en posant la plaque directement sur les cylindres d'appuis. Cependant, ce mode de chargement n'a pas été retenu car, malgré la très grande souplesse de la membrane, la pression obtenue n'était pas uniformément répartie, en particulier au voisinage des raidisseurs.

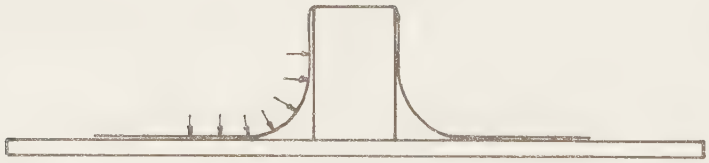


fig.57

1.5.1.3 - Réalisation des plaques

Les plaques utilisées au cours des essais sont de deux types

- 1 - Plaques en acier
- 2 - Plaques en alliage d'aluminium A U 4 G.

- Plaques en acier

Compte tenu de la gamme de pression choisie, si nous voulons mettre en évidence les effets de membrane, les épaisseurs des plaques étudiées doivent rester inférieures à 1,5 mm. Les raidisseurs placés d'un seul côté de la plaque ont une hauteur de l'ordre de 28 mm, et une largeur comprise entre 5 et 15 mm.

Dans le cas présent, les difficultés rencontrées pour obtenir des liaisons correctes entre ces différents éléments, ont conduit à expérimenter successivement :

- Le collage à froid (Araldite) - présente l'inconvénient d'une trop grande fragilité lors des essais avec grandes déformation.
- Le soudage par points - La discontinuité de la liaison plaque raidisseur rend impossible toute interprétation des résultats expérimentaux obtenus.
- Etamage avec ou sans préchauffage du raidisseur - entraîne des déformations locales de la plaque trop importantes.
- Soudage continu - non envisageable dans le cas des épaisseurs de plaques étudiées.

Nous avons finalement retenu le collage à froid en respectant néanmoins une limite de pression à ne pas dépasser, afin d'éviter tout risque de rupture du film de colle.

- Plaques en alliage d'aluminium A U 4 G

Ces plaques, qui constituent la base essentielle de l'expérimentation, ont été réalisées par la Société Sud Aviation - Usine de Bouguenais - NANTES.

La liaison plaque-raidisseur est assurée par collage à chaud et vis de serrage.

Ces plaques, qui ne présentent pratiquement aucune déformation après collage, ont été étudiées dans le domaine élastique et le domaine plastique. Des déformations très importantes ont été obtenues (50 mm de flèche au centre d'un raidisseur de longueur 800 mm) sans que l'on puisse noter une défaillance du film de colle.

1.5.1.4 - Caractéristiques des plaques

Les dimensions extérieures des plaques d'essais sont de 840 x 840 mm. Les raidisseurs sont équidistants, et les distances séparant les derniers raidisseurs des extrémités libres de la plaque sont égales à la moitié de l'entraxe normal.

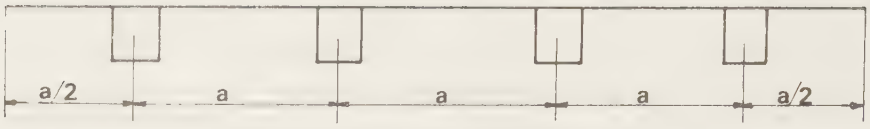


fig.58

Chaque plaque est repérée par un nombre de 3 chiffres :

- le premier indique le nombre de raidisseurs correspondant à une longueur de plaque l

- les deux suivants donnent l'épaisseur de la plaque exprimée en dixièmes de millimètre.

Un indice permet de différencier les plaques ayant un même repère.

Le repère des plaques en acier est précédé de la lettre A.

Les essais effectués sur les plaques en acier sont plus sommaires que ceux pratiqués sur les plaques en alliage d'aluminium. Ces essais avaient pour but essentiel de mettre au point le système expérimental et de vérifier si les procédés de fabrication adoptés pour les plaques étaient compatibles avec les déformations imposées.

Les caractéristiques des plaques sont portées sur les tableaux des pages 95 et 96.

1.5.1.5 - Calculs d'erreurs

1.5.1.5.1 - Erreurs sur la détermination des paramètres

Le coefficient α , déterminant le rapport entre la flèche maximum et la charge répartie, est défini à partir des deux paramètres β et λ

avec : $\beta = \frac{n a'}{2 l}$

et : $\lambda = \frac{E I^*}{l D} = \frac{t H^3 (1-\nu^2)}{l h^3} \cdot \frac{E_r}{E_p}$

E_r et E_p désignant les modules d'élasticité des matériaux constituant les raidisseurs de la plaque.

Compte tenu du montage d'essais et du soin particulier apporté à la construction des plaques, nous pouvons admettre comme erreurs relatives sur les dimensions

PLAQUES EN ACIER

Plaque N°	A. 215	A. 310	A. 410_1	A. 410_2	A. 410_3	A. 410_4
Epaisseur h mm	1,5	1	1	1	1	1
Nombre de raidisseurs	2	3	4	4	4	4
Entre axes mm	420	280	210	210	210	210
Longueur entre appuis mm	794	794	794	794	794	794
Raidisseur t x H mm	8 x 30	7 x 30	4 x 30	5 x 30	10 x 30	15 x 30
Module d'élasticité daN/mm^2	210^4	210^4	210^4	210^4	210^4	210^4
Coefficient Poisson	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
D	6179	1831	1831	1831	1831	1831
	81	238	136	170	340	510
	/4	/6	/8	/8	/8	/8
10^7	3032	576	350	292	226	196
Hn	390	1914	6024	6024	6024	6024

PLAQUES EN ALLIAGE D'ALUMINIUM

Plaque N°	210_1	210_2	310	406	408	410	510	610
Epaisseur h mm	1	1	1	0,6	0,8	1	1	1
Nombre de raidisseurs	2	2	3	4	4	4	5	6
Entre axes mm	420	420	280	210	210	210	168	138
Longueur entre appuis mm	794	794	794	794	794	794	794	794
Raidisseur t x H mm	10x20	12x25	12x25	12x25	12x25	12x25	12x25	12x25
Module d'élasticité daN/mm^2	7500	7500	7500	7500	7500	7500	7500	7500
Coefficient Poisson	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33
D	701	701	701	151	359	701	701	701
	103	236	236	1044	451	236	236	236
	0,785	0,807	0,530	0,391	0,391	0,391	0,308	0,249
10^7	2348	2010	536	130	173	235	142	108
10^7	612	270	181	30	71	136	10,8	91
Hn	390	390	1914	6024	6024	6023	13000	30509

$$\frac{\Delta a'}{a'} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{5}{1000}$$

Les erreurs sur les caractéristiques des matériaux sont plus difficilement appréciables.

Le module d'élasticité a été mesuré par la méthode des pendules sympathiques et par les essais de traction avec jauges d'extensomètrie électriques. Le recoupement de ces deux modes de calcul montre que le matériau utilisé, pour la construction des plaques et des raidisseurs (Alliage d'aluminium), a un module d'élasticité ayant pour valeur :

$$E = 7500 \pm 100 \quad daN/mm^2$$

La valeur adoptée pour le coefficient de Poisson est :

$$\nu = 0,33 \pm 0,005$$

et on peut admettre que ce coefficient est invariable pour les différentes plaques élaborées dans un même matériau.

Ainsi les paramètres β et λ seront définis avec une erreur relative telle que

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{0.2}{100}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{4,6}{100}$$

1.5.1.5.2 - Erreur sur le coefficient

Le coefficient α est défini par la relation (67), en retenant seulement le 1er terme de la série

$$\alpha = \frac{4}{\pi^5}\left[1 - \frac{\pi\lambda(\beta \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta)}{\pi\lambda(\beta + \operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta) + 4\operatorname{sh}^2\beta}\right] \qquad \text{pour } m = 1$$

à un coefficient numérique près, nous pouvons écrire cette expression sous la forme :

$$\alpha = 1 - \frac{a\lambda}{b\lambda + c}$$

soit :

$$\alpha = \frac{\lambda(b-a)+c}{b\lambda + c}$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{d\left[\lambda(b-a)+c\right]}{\lambda(b-a)+c} - \frac{d(b\lambda+c)}{b\lambda+c}$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{(b-a)\,d\lambda}{\lambda(b-a)+c} - \frac{b\,d\lambda}{b\lambda+c}$$

ainsi :

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{ca\,\Delta\lambda}{\left[\lambda(b-a)+c\right]\left[b\lambda+c\right]}$$

En se reportant à l'expression initiale de α on peut noter que les coefficients a, b et c ont des valeurs extrêmement voisines les unes des autres.

On obtient une valeur supérieure de l'erreur en remarquant que

$$c \ll b\lambda$$

et $\lambda(b-a) \ll c$ avec $b > a$

ainsi, il vient :

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} < \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

soit :

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} < \frac{4.6}{100}$$

Pour les applications numériques, nous avons déterminé, pour chaque valeur de λ, l'erreur relative sur α en partant des valeurs données dans le tableau N° 2 et des courbes de variations annexées à ce tableau page 48 . Nous avons noté que cette erreur relative diminuait avec λ .

Pour λ variant de 20 à 1 000 , l'erreur relative sur α est comprise entre

$$\frac{3}{100} < \frac{\Delta\alpha}{\alpha} < \frac{4.2}{100}$$

1.5.1.5.3 - <u>Erreur sur la flèche au centre</u>

$$\omega_o = \alpha\,\frac{q l^4}{D}$$

avec :

$$D = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta E}{E} + \frac{3 \Delta h}{h} + \frac{2 \Delta \nu}{1-\nu^2}$$

soit :

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{100}{7500} + \frac{3 \cdot 0.5}{100} + \frac{0.01}{1}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{3.8}{100}$$

Cette erreur théorique peut en fait être diminuée en déterminant globalement la valeur de la rigidité D . Cette détermination peut être effectuée par un essai d'un élément de plaque circulaire chargé en son centre, ou d'un élément de plaque rectangulaire soumis à une flexion pure.

La rigidité D est ainsi obtenue avec une erreur relative voisine de Dans ces conditions :

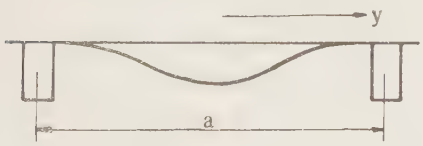
$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{4 \Delta l}{l} + \frac{\Delta D}{D}$$

soit avec

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{0.2}{100}$$

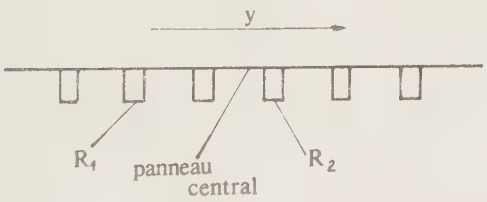
$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{6}{100}$$

Une erreur expérimentale peut provenir du rapprochement des raidisseurs au cours des déformations.



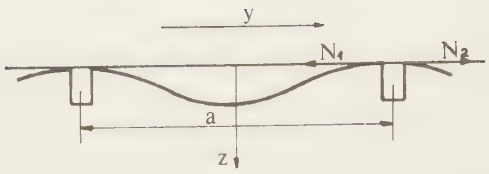
Théoriquement, nous avons admis que l'entraxe a restait constant au cours des déformations, ceci en raison de la continuité de la plaque dans la direction des y .

Cette condition est plus particulièrement vérifiée, lorsque le nombre des raidisseurs est plus important.



Dans ce cas, les déformations des deux panneaux adjacents au panneau central et du panneau central lui-même, sont identiques, et les deux raidisseurs de rives R_1 et R_2 conservent un entraxe constant.

Si le nombre des raidisseurs est peu élevé, les sollicitations des effets normaux N_1 et N_2 , ne sont plus symétriques



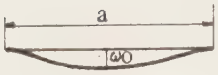
$N_1 > N_2$

Ce qui entraîne une diminution de l'entraxe

Evaluons la variation de flèche ω_0 obtenue lorsque les raidisseurs se rapprochent d'une quantité très faible V_0

Dans la direction des y , la déformée de la plaque peut être prise sous la forme :

$$\omega = \frac{\omega_0}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi y}{a}\right)$$

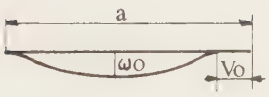


La longueur de la déformée a pour valeur, en remarquant que $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ est $\ll 1$

$$\int ds = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{\pi^2\omega_0^2}{a^2}\sin^2\frac{2\pi y}{a}\right] dy$$

car $$\int ds = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2}\, dy = 2\int_0^{\frac{a}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dy$$

ainsi $$\int ds = a + \frac{1}{4}\frac{\pi^2\omega_0^2}{a}$$



Pour un entraxe $(a - V_0)$ lorsque la déformation est dûe uniquement au déplacement V_0 , nous avons :

$$\int ds = a = (a - v_0) + \frac{1}{4}\frac{\pi^2\omega_0^2}{a - v_0}$$

V_0 est très inférieure à a

ainsi : $$V_0 = \frac{\pi^2\omega_0^2}{4a}$$

ce qui donne, en posant n le nombre de raidisseurs répartis sur la plaque de longueur l :

n	= 2	a	= 400	= 1 mm	V	=	6 μ
n	= 3	a	= 265	= 1 mm	V	≃	9 μ
n	= 4	a	= 200	= 1 mm	V	≃	12 μ
n	= 5	a	= 160	= 1 mm	V	≃	15 μ
n	= 6	a	= 133	= 1 mm	V	≃	18 μ

Nous pouvons noter qu'un très faible déplacement des raidisseurs peut entraîner une augmentation notable de la flèche au centre .

Les résultats expérimentaux obtenus montrent que, dans le cas des plaques comportant un nombre faible de raidisseurs, les flèches expérimentales sont supérieures à celles théoriquement calculées.

1.5.2 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

1.5.2.1 - Flèches au centre de la plaque

1.5.2.1.1 - Plaques en acier

Les premiers essais effectués sur les quatre plaques d'acier repérées A 410, comportent uniquement un relevé de flèche au centre de la plaque sous une pression équivalente à 10 cm d'eau, soit 10^{-4} daN/mm^2

Nous avons noté les résultats suivants :

Flèche au centre en mm sous une pression de 10^{-4} daN/mm^2			
Plaque N°	Théorie linéaire	Théorie avec effet de membrane	Valeur expérimentale
A 410_1	0,765	0,46	0,49
A 410_2	0,648	0,42	0,46
A 410_3	0,500	0,34	0,40
A 410_4	0,429	0,32	0,35

Pour les deux plaques A 215 et A 310 , les essais ont porté sur la détermination des variations des flèches au centre en fonction d'une pression uniforme variant de 0 à 3 10^{-4} daN/mm^2.

Les résultats sont portés sur les planches N° 60 . 61 page 103

1.5.2.1.2 - Plaques en alliage d'aluminium

Sur chacune des planches N° 62 à 69 sont représentées :

1 - La courbe expérimentale définissant la variation de la flèche au centre en fonction de la pression

2 - La courbe correspondant à la valeur théorique

$$\omega_0 = \alpha \frac{q l^4}{D} \qquad \text{(théorie linéaire)}$$

3 - La courbe théorique traduisant l'influence de l'effet de membrane.

Chaque planche porte le repère de la plaque correspondante.

1.5.2.2 - Flèche au centre du raidisseur

Les planches 71 à 78 représentent les variations de la flèche au centre des raidisseurs en fonction de la pression uniformément répartie sur la plaque.

Ces mesures ont été effectuées sur les plaques de la série "Alliage d'aluminium".

Nous avons également représenté sur chaque figure, les variations de la flèche au centre des raidisseurs, calculées en supposant que la charge constante q, uniformément répartie sur la largeur a, est entièrement supportée par le raidisseur et une largeur de plaque égale à 30 fois l'épaisseur h.

Nous déterminons ainsi une inertie fictive If , et la flèche au centre est donnée par

$$\omega_0 = \frac{5}{384} \cdot \frac{q a l^4}{E I_f}$$

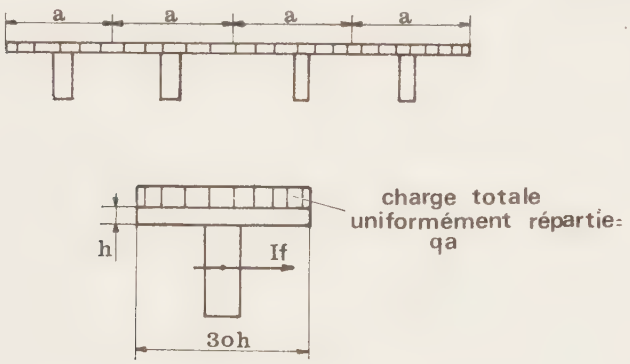


fig. 59

1.5.2.3 - Déformations des raidisseurs

Afin de contrôler, d'une part que la symétrie du système se conserve au cours des déformations, (cette condition n'est pas vérifiée lorsqu'il y a des tassements d'appuis ou que la conception des plaques présente des anomalies) et d'autre part que la déformée du raidisseur est une sinusoïde (admis dans le calcul théorique) les flèches en différents points du raidisseur ont été relevées pour chaque pression.

Nous donnons dans ce paragraphe, les résultats obtenus pour la plaque 210_1 Les résultats sont analogues pour les autres plaques.

Cette plaque comporte deux raidisseurs repérés A et B , les flèches obtenues sont portées dans les tableaux page 109

FIGURE 60 - Variations de la flèche au centre d'une plaque en fonction de la pression uniformément répartie

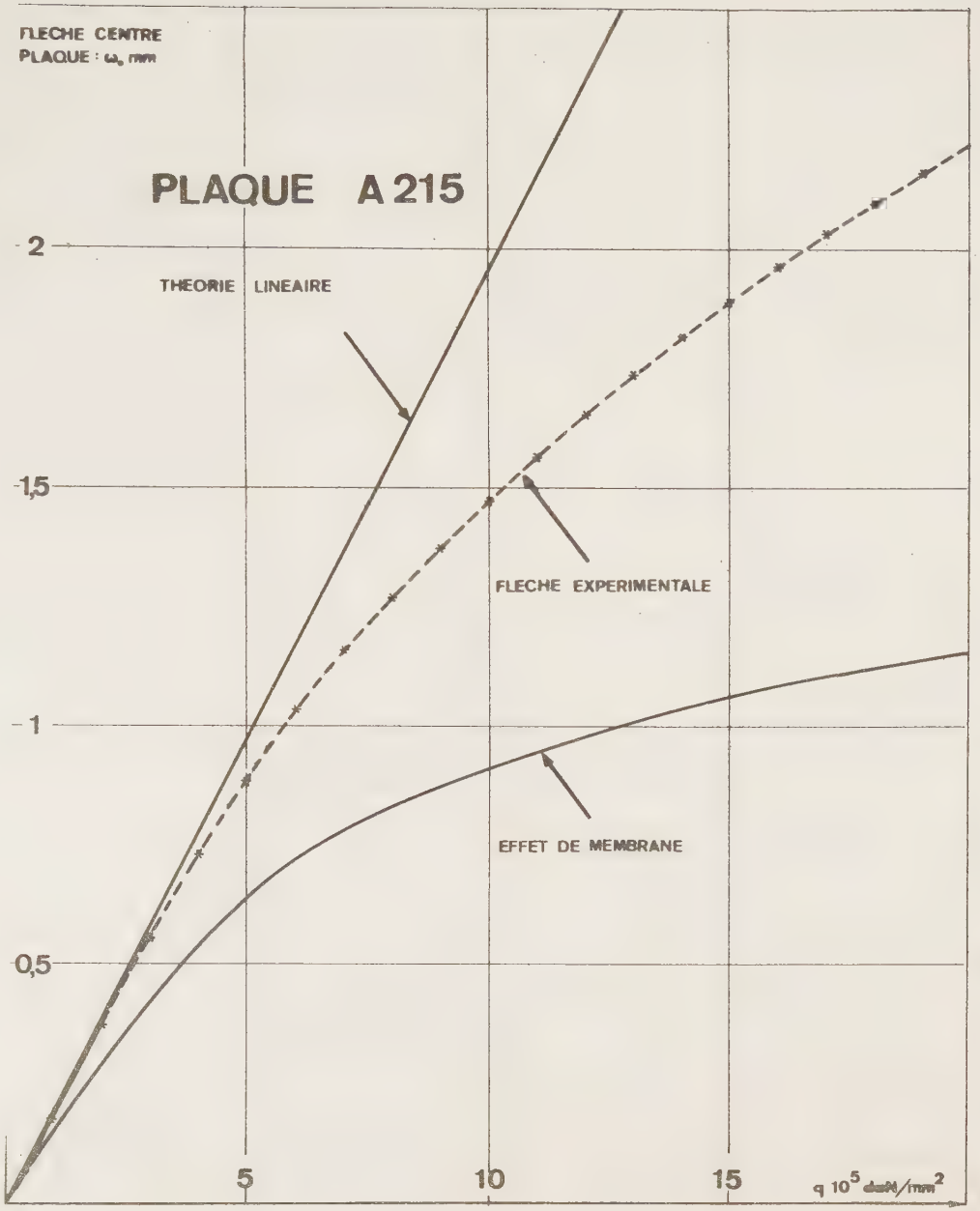
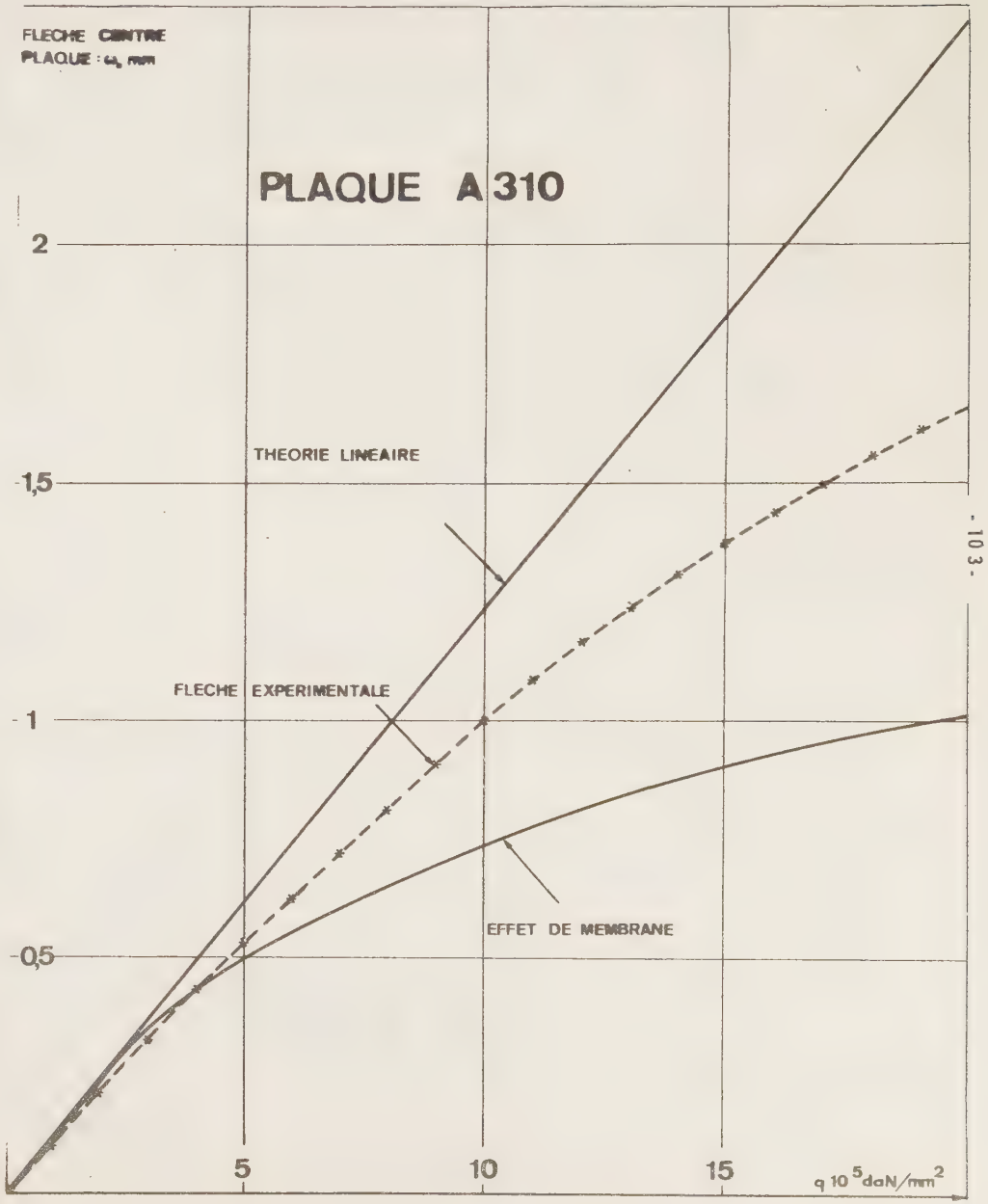


FIGURE 61 - Variations de la flèche au centre d'une plaque en fonction de la pression uniformément répartie



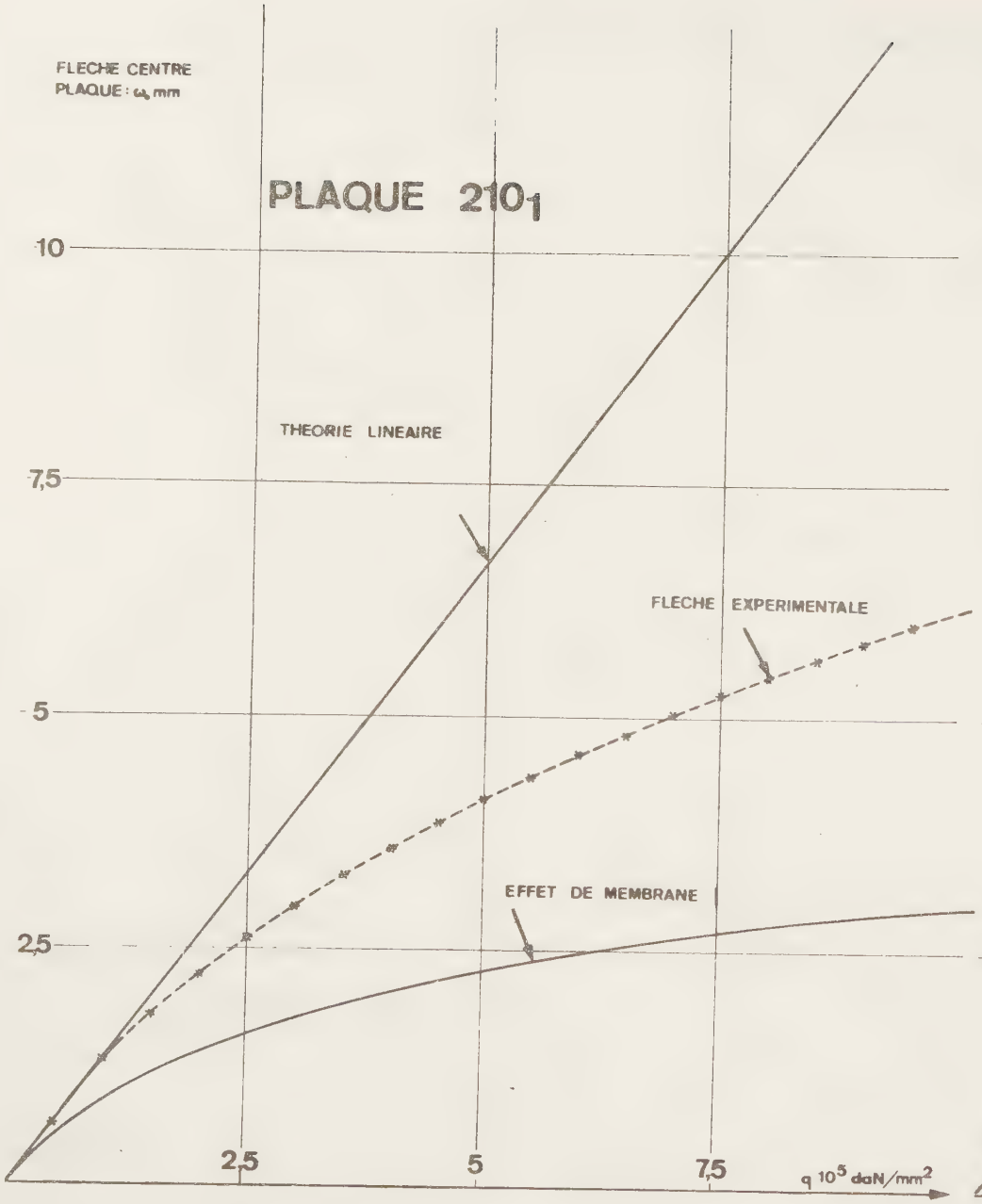


FIGURE 62 - Variations de la flèche au centre d'une plaque en fonction de la pression uniformément répartie

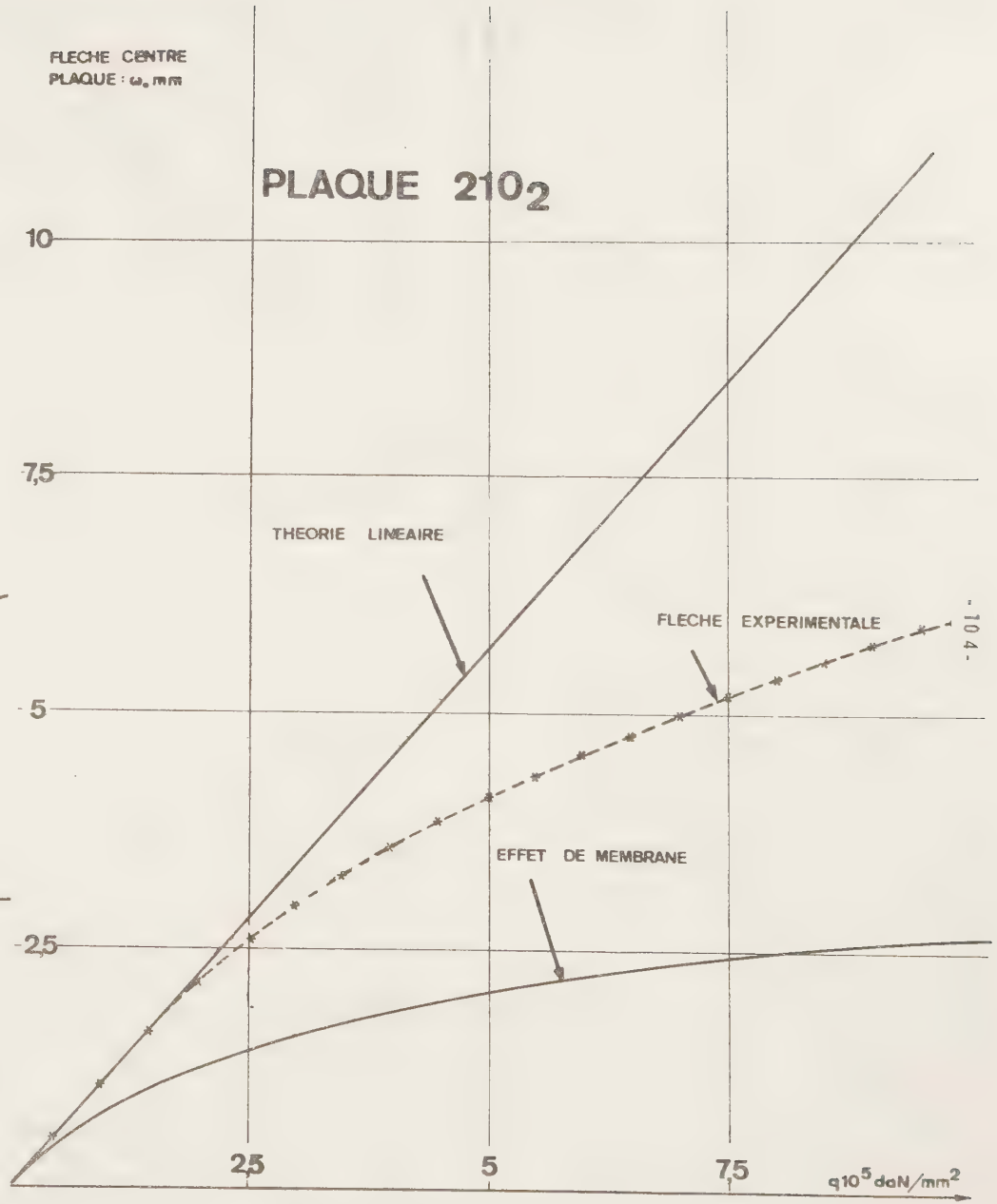
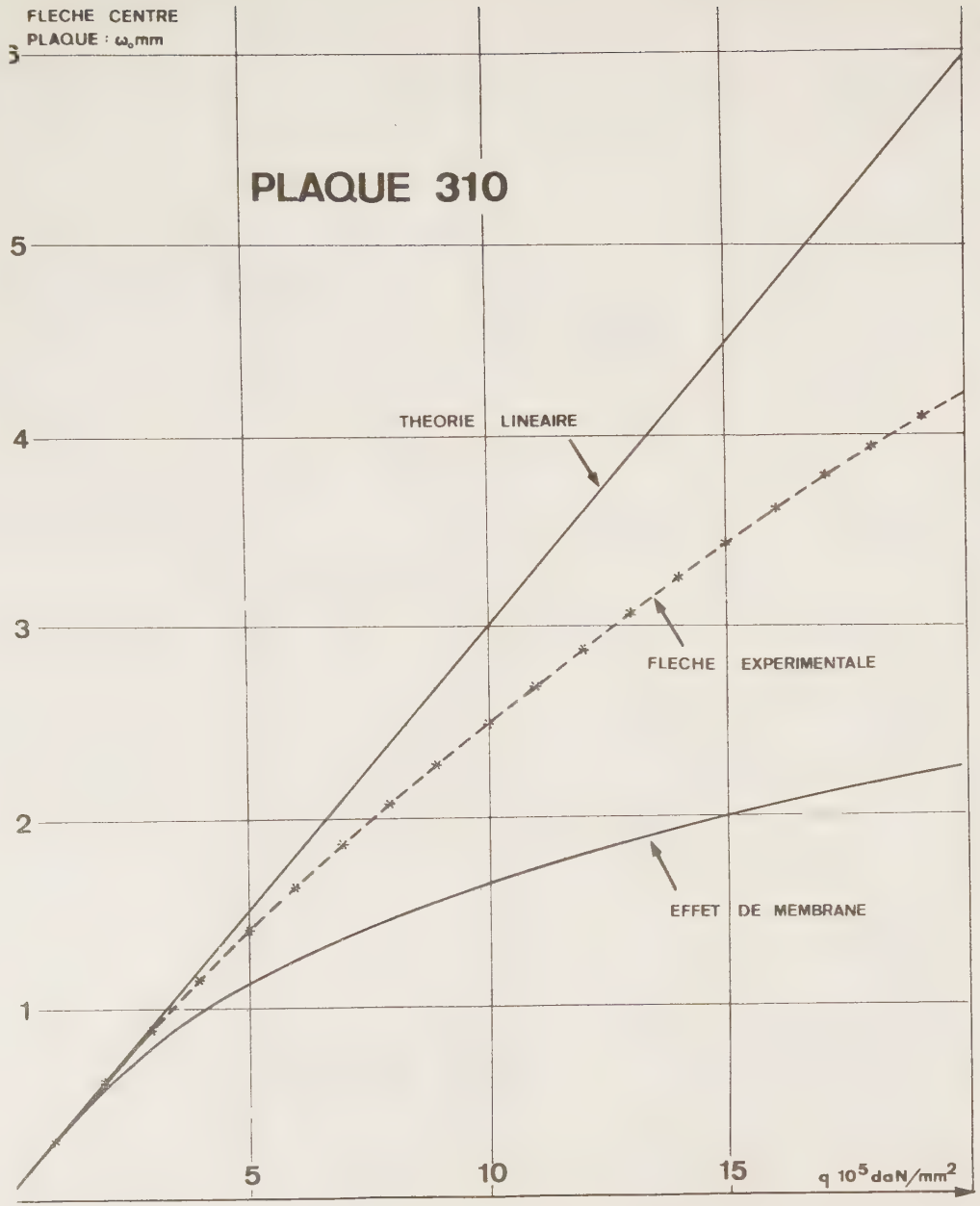


FIGURE 63 - Variations de la flèche au centre d'une plaque en fonction de la pression uniformément répartie



[illegible] - Variations de la flèche au centre d'une plaque en fonction de la pression uniformément répartie

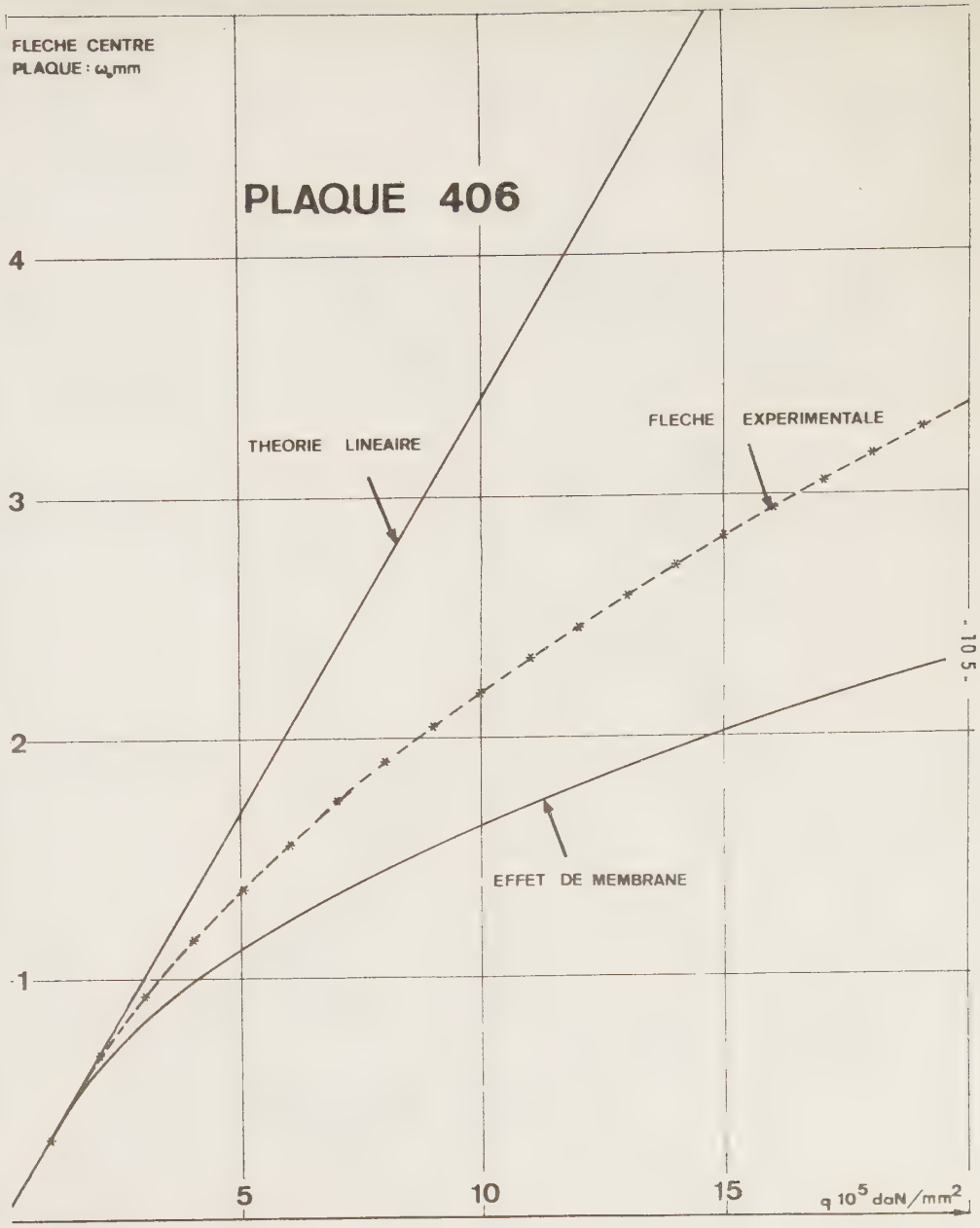
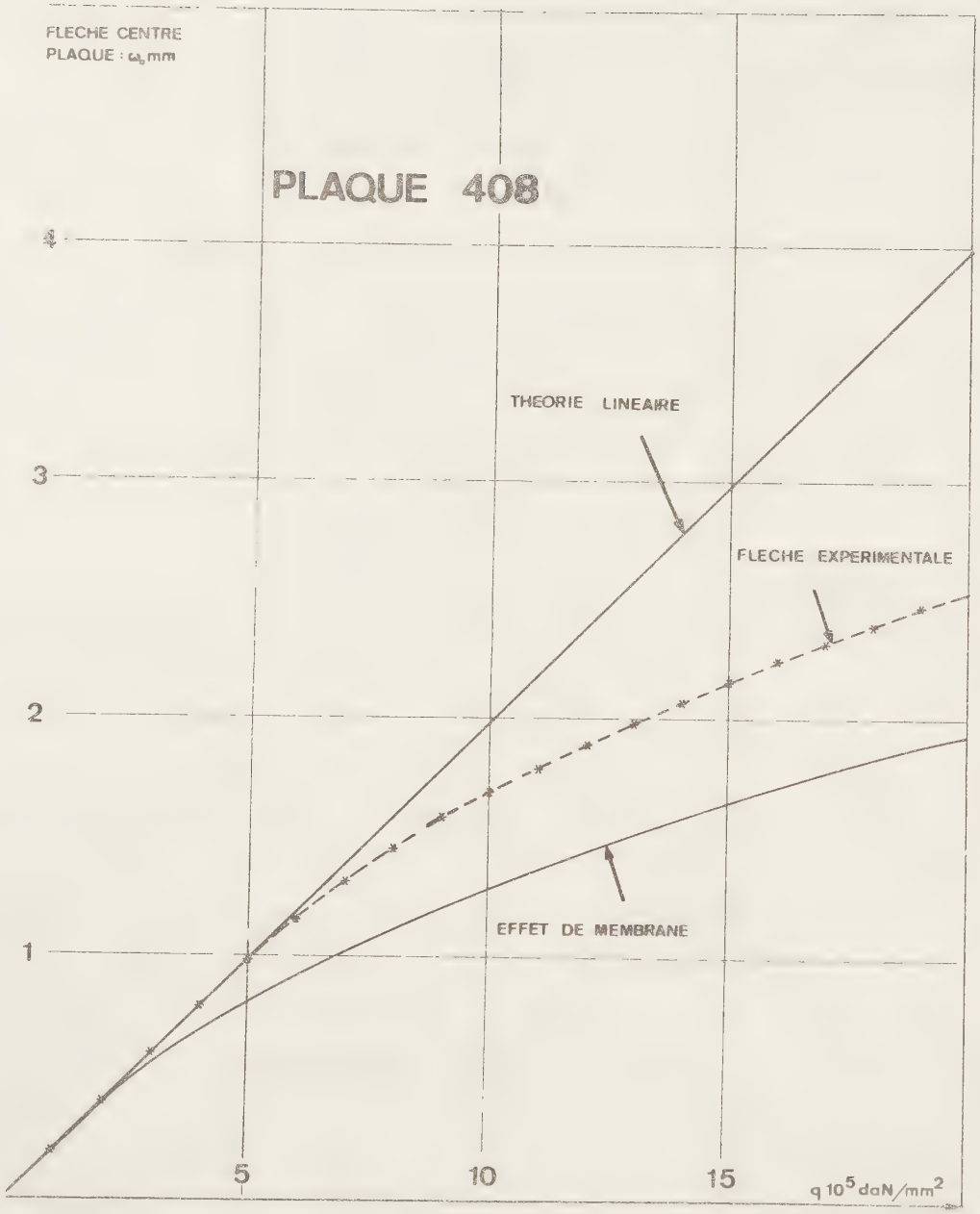
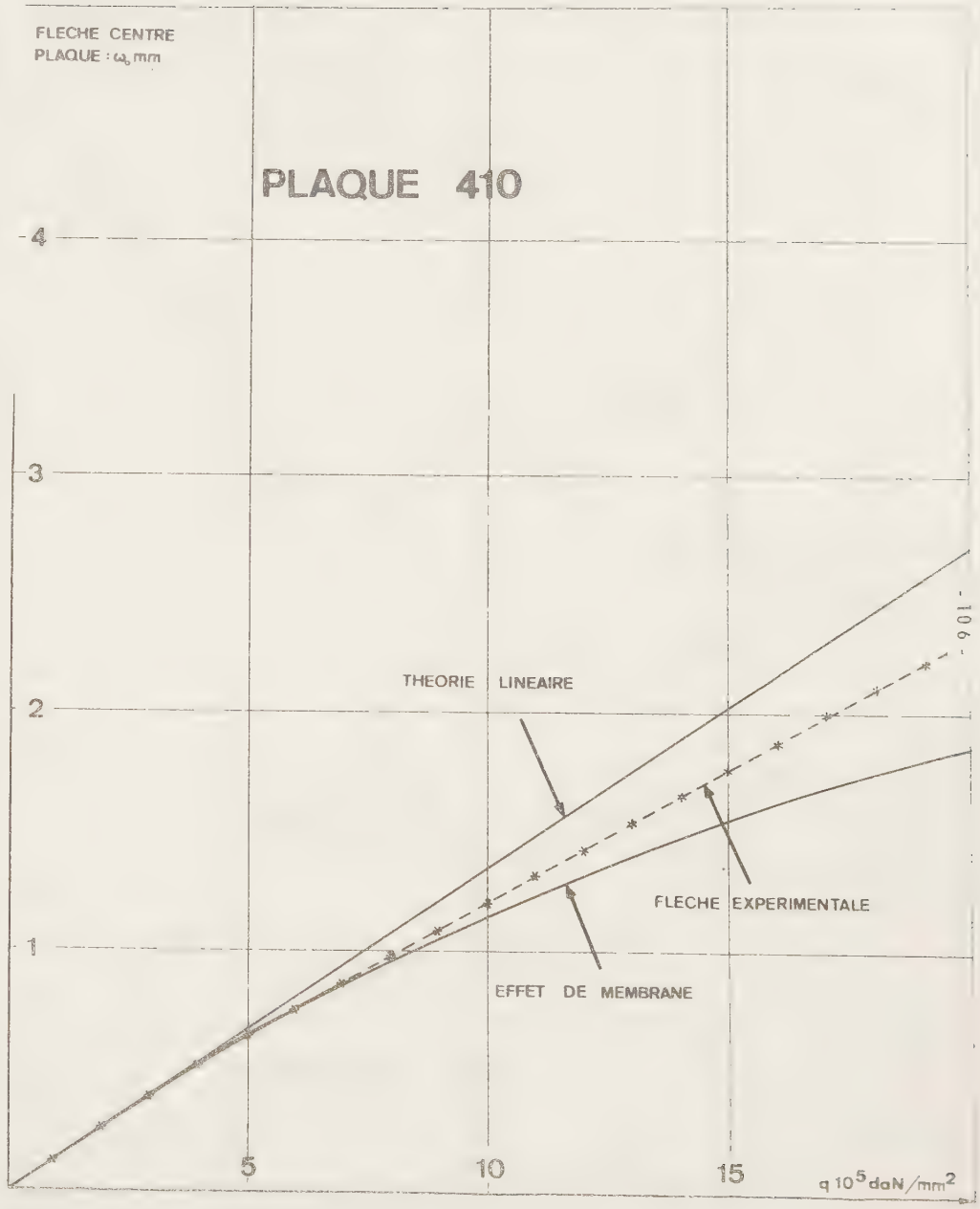


FIGURE 65 - Variations de la flèche au centre d'une plaque en fonction de la pression uniformément répartie



[illegible] - Variations de la flèche au centre [illegible] en fonction de la pression uniformément répartie



[illegible] - Variations de la flèche au centre [illegible] en fonction de la pression uniformément répartie

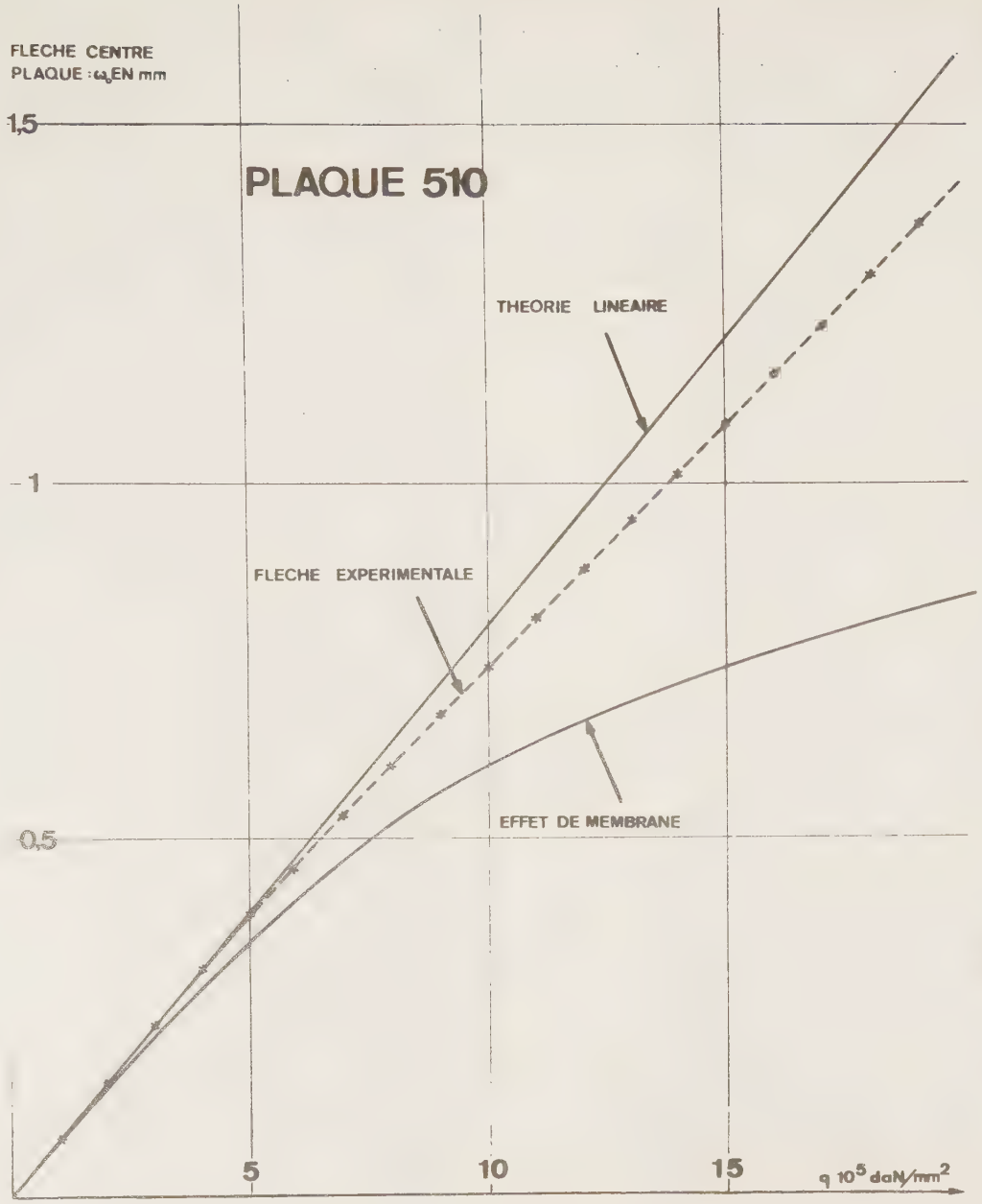


FIGURE 68 - Variations de la flèche au centre d'une plaque en fonction de la pression uniformément répartie

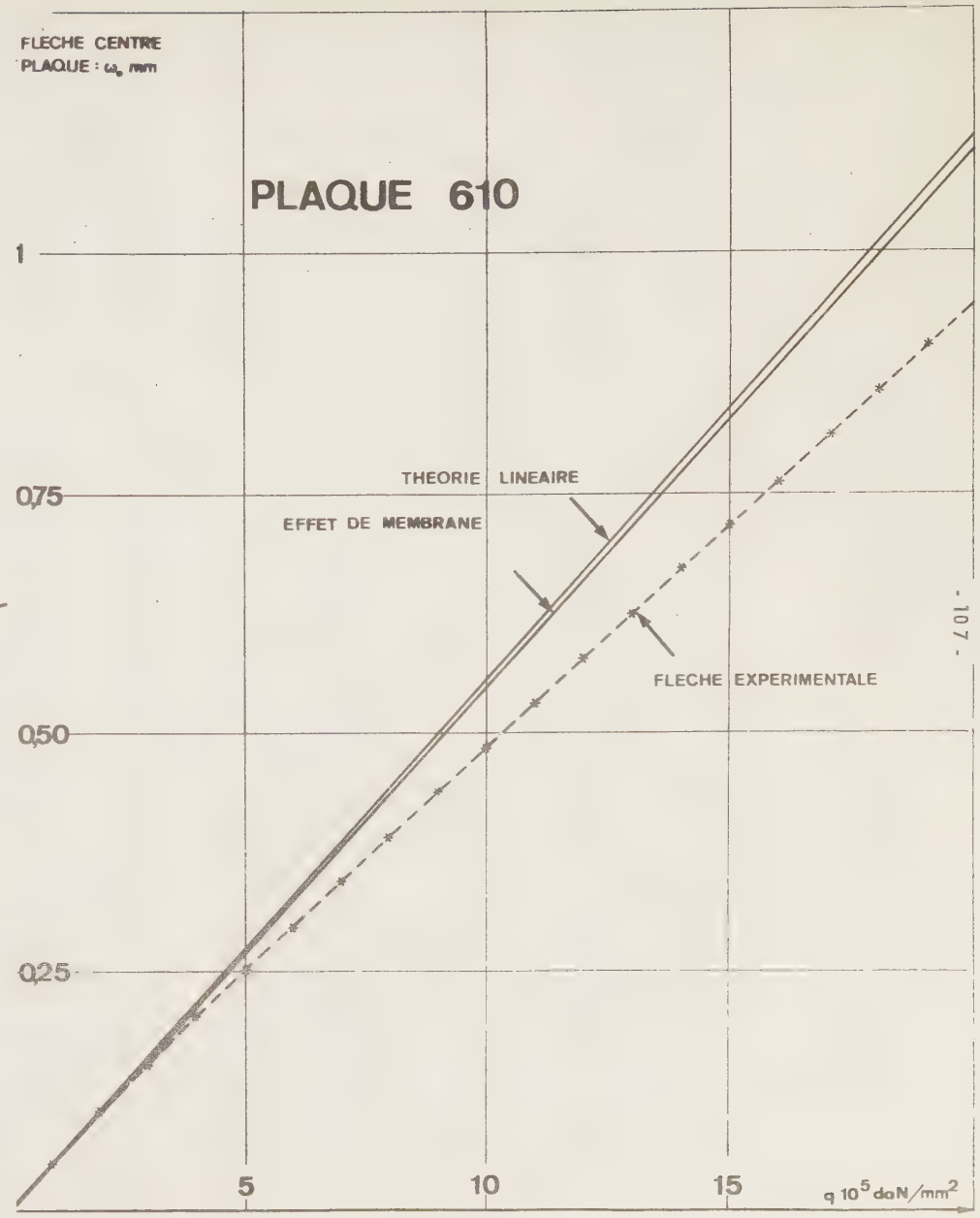


FIGURE 69 - Variation de la flèche au centre d'une plaque en fonction de la pression uniformément répartie

L'allure des déformées est représentée ci-dessous

fig.70

1.5.2.4 - Mesures des déformations linéïques

Un certain nombre de plaques ont été munies de jauges d'extensométrie électrique type BUDD C12141B ou C12142B.

Ces jauges placées sur l'axe perpendiculaire aux raidisseurs et passant par le centre de la plaque, ont permis de déterminer les déformations linéiques dans la direction de cet axe.

Afin de déterminer l'influence de l'effet de membrane, une double série de jauges étaient collées symétriquement par rapport au plan moyen de la plaque.

Cependant, comme nous l'avons noté dans la conclusion de ce paragraphe, les résultats obtenus au cours de ces essais furent peu exploitables pour mettre en évidence les contraintes dûes à l'effet de membrane. Sur les planches 79 à 82 sont portées les valeurs des déformations linéiques expérimentales, et la courbe théorique représentant les variations de ces déformations entre deux raidisseurs. La courbe théorique représentée sur ces graphes a été calculée à partir des résultats du paragraphe 1-3-4

$$\varepsilon'_x = \pm \frac{6}{h^2} (\alpha_x - \nu \alpha_y) q_1 l^2$$

$$\varepsilon'_y = \pm \frac{6}{h^2} (\alpha_y - \nu \alpha_x) q_1 l^2$$

la charge q_1 adoptée dans le calcul des déformations ε'_x est la charge constante uniformément répartie sur la plaque.

Les symboles Δ indiquent les points de mesure situés sur le dessus de la plaque. (côté où la pression est appliquée).

Les symboles O les points situés sur le dessous de la plaque.

En vue de simplifier la présentation des résultats, nous avons reporté sur les graphes les résultats Δ changés de signe.

Plaque 210₁

Raidisseur "A"

Position \ Pression en cm. d'eau	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15
1	0,10	0,185	0,265	0,33	0,41	0,49	0,64	0,79	0,945	1,18
2	0,16	0,33	0,46	0,59	0,74	0,87	1,14	1,43	1,70	2,10
3	0,205	0,41	0,58	0,75	0,95	1,12	1,47	1,84	2,20	2,74
4	0,24	0,44	0,645	0,84	1,03	1,23	1,64	2,02	2,41	3,02
5	0,21	0,41	0,580	0,76	0,94	1,12	1,47	1,84	2,20	2,76
6	0,16	0,32	0,45	0,595	0,75	0,86	1,13	1,42	1,69	2,10
7	0,095	0,18	0,26	0,33	0,41	0,49	0,63	0,79	0,94	1,175

Raidisseur "B"

Position \ Pression en cm. d'eau	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15
1	0,095	0,18	0,26	0,33	0,405	0,48	0,63	0,78	0,935	1,16
2	0,16	0,31	0,44	0,57	0,71	0,84	1,11	1,40	1,67	2,07
3	0,195	0,40	0,56	0,73	0,92	1,09	1,43	1,81	2,16	2,70
4	0,22	0,42	0,62	0,81	1,01	1,21	1,60	1,99	2,39	3,00
5	0,20	0,39	0,56	0,73	0,92	1,10	1,44	1,81	2,17	2,71
6	0,15	0,305	0,435	0,57	0,72	0,84	1,11	1,40	1,675	2,08
7	0,085	0,170	0,245	0,32	0,40	0,47	0,62	0,77	0,92	1,155

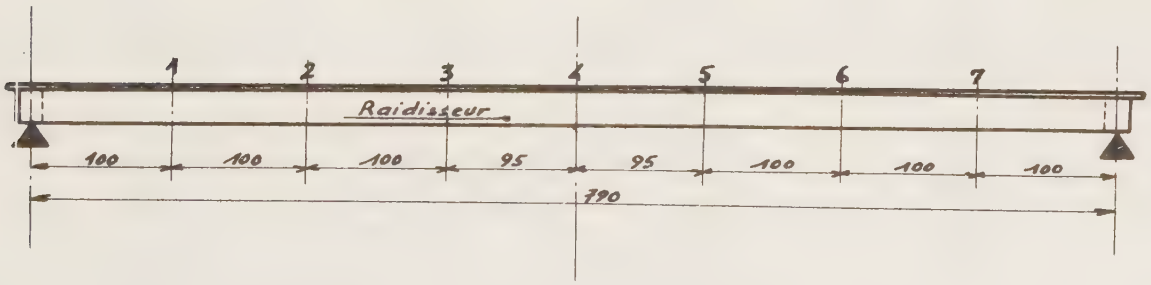


FIGURE 71 - Variations de la flèche au centre des raidisseurs.
graphe obtenu en utilisant l'Inertie fictive correspondant
à une largeur d'aile égale à trente fois l'épaisseur de la plaque

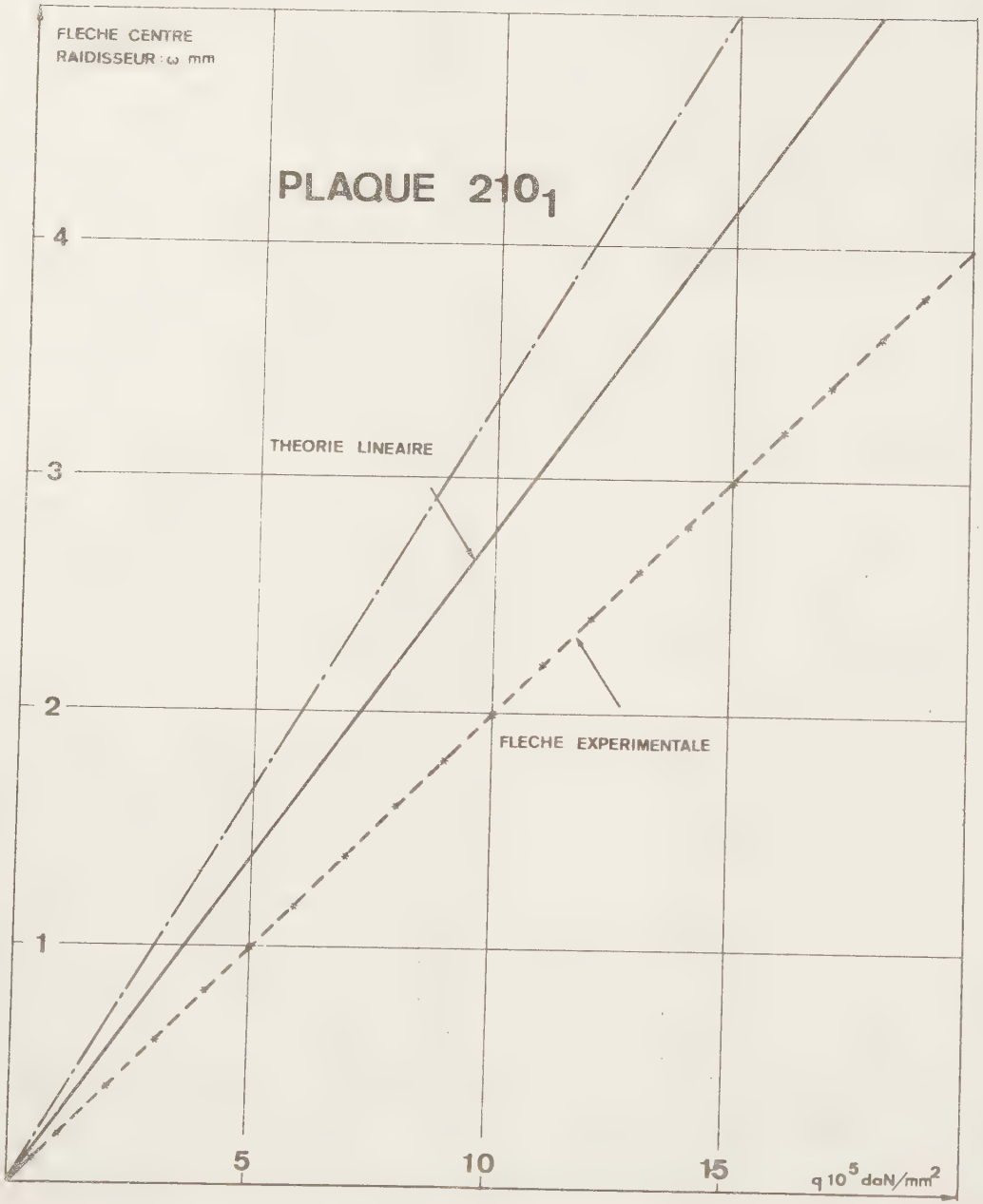


fig. 71

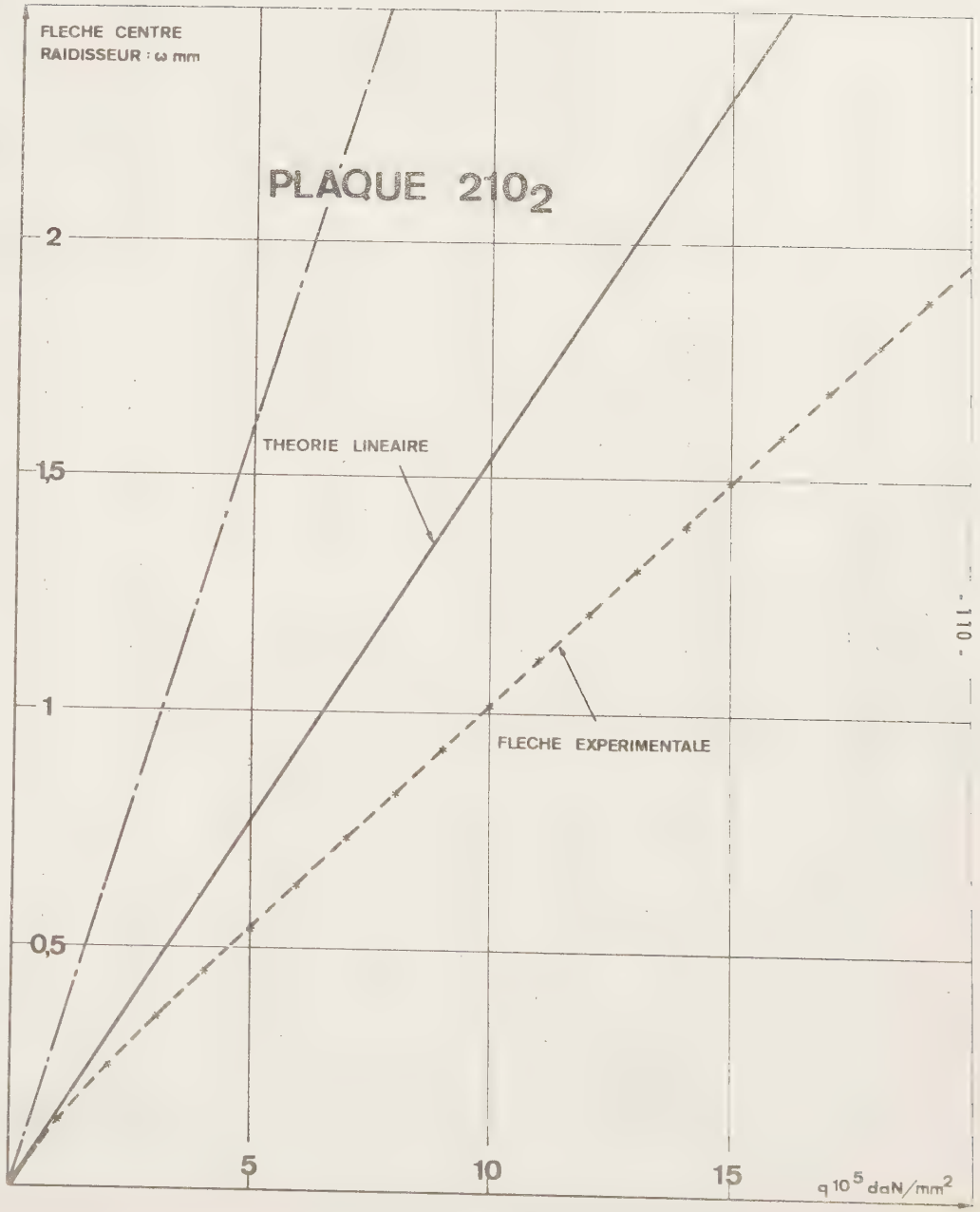


fig. 72

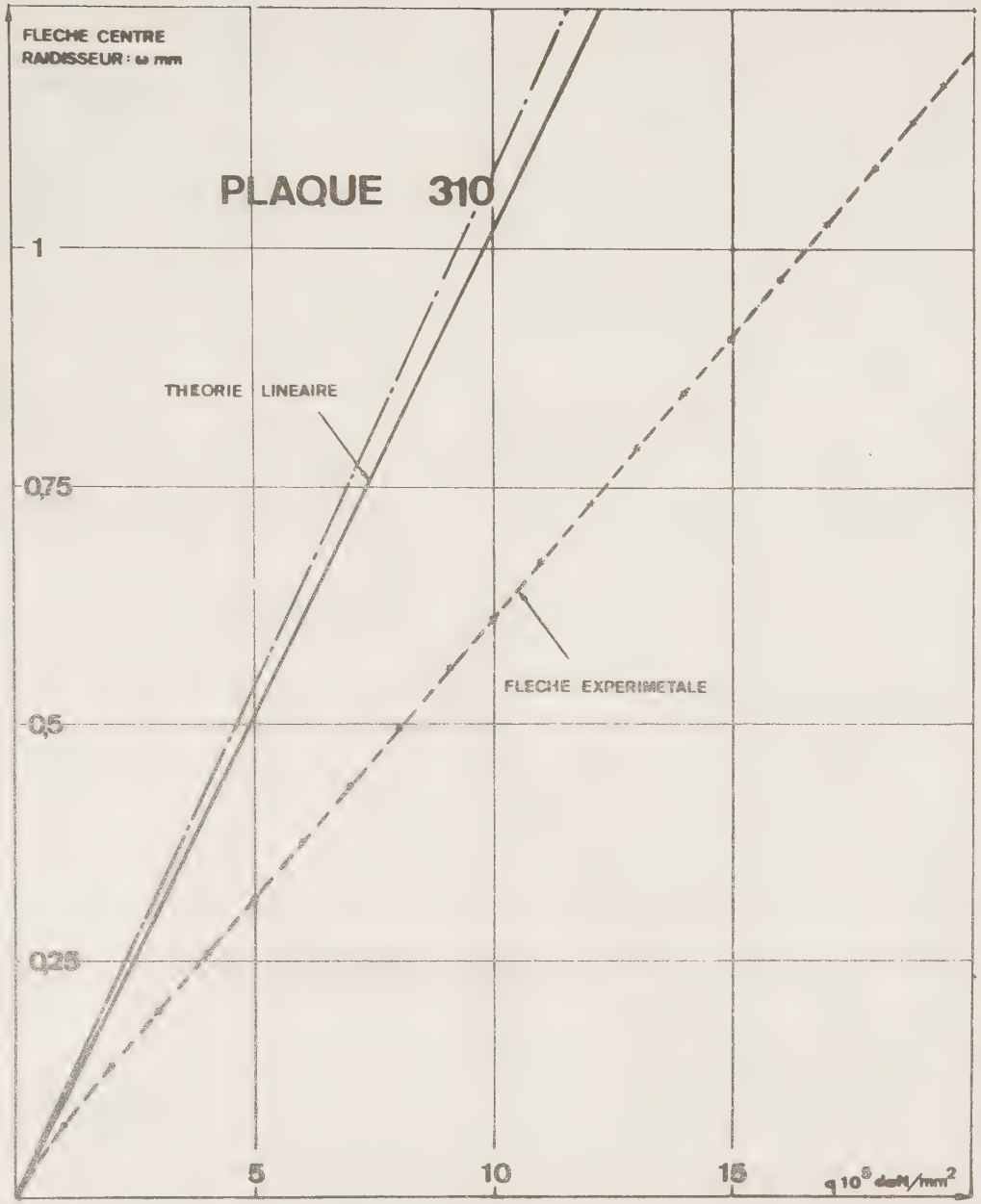

FLECHE CENTRE
RAIDISSEUR : ω mm
PLAQUE 310
1
0,75
0,5
0,25
THEORIE LINEAIRE
FLECHE EXPERIMETALE
5
10
15
q 10⁵ daN/mm²

fig . 73

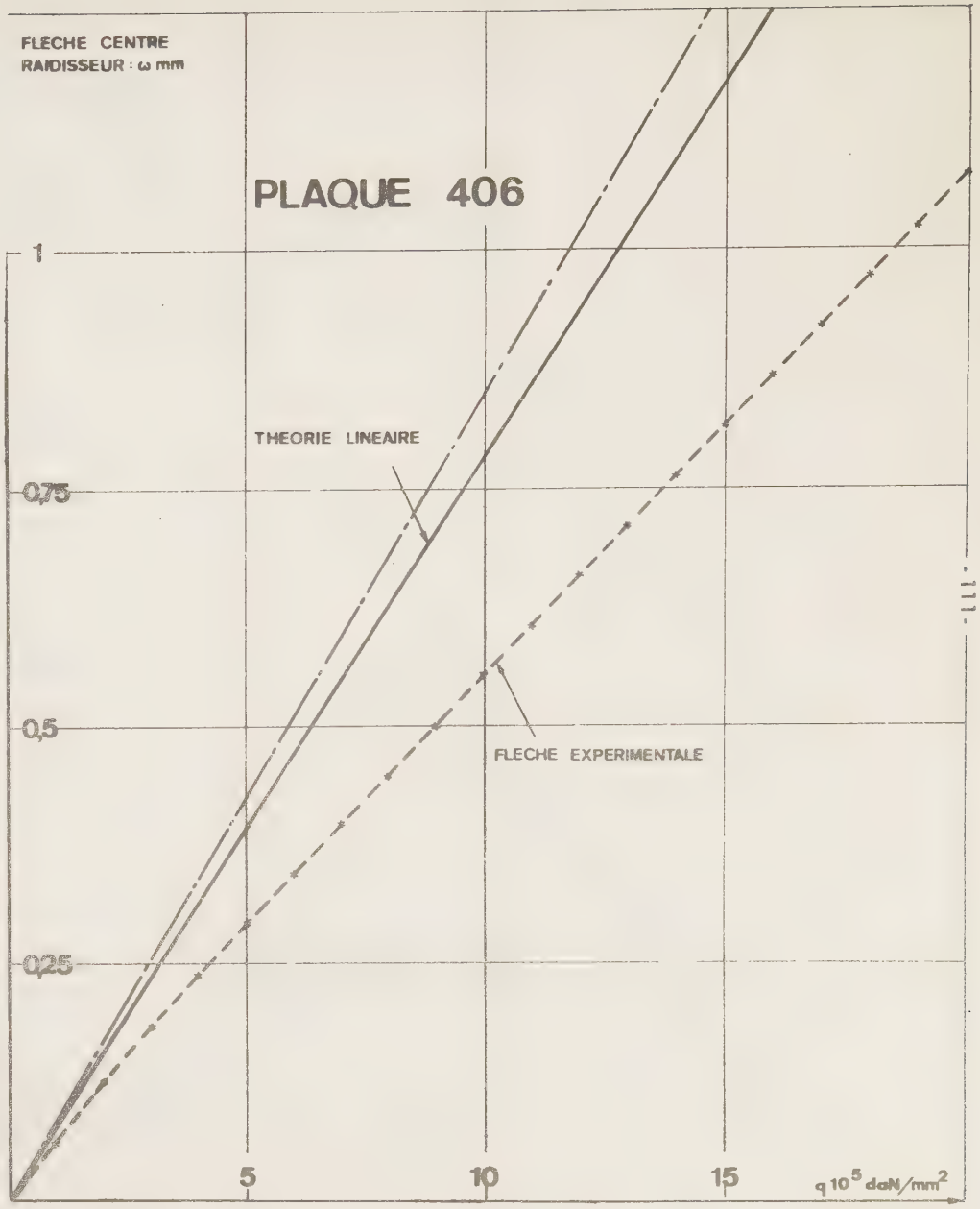
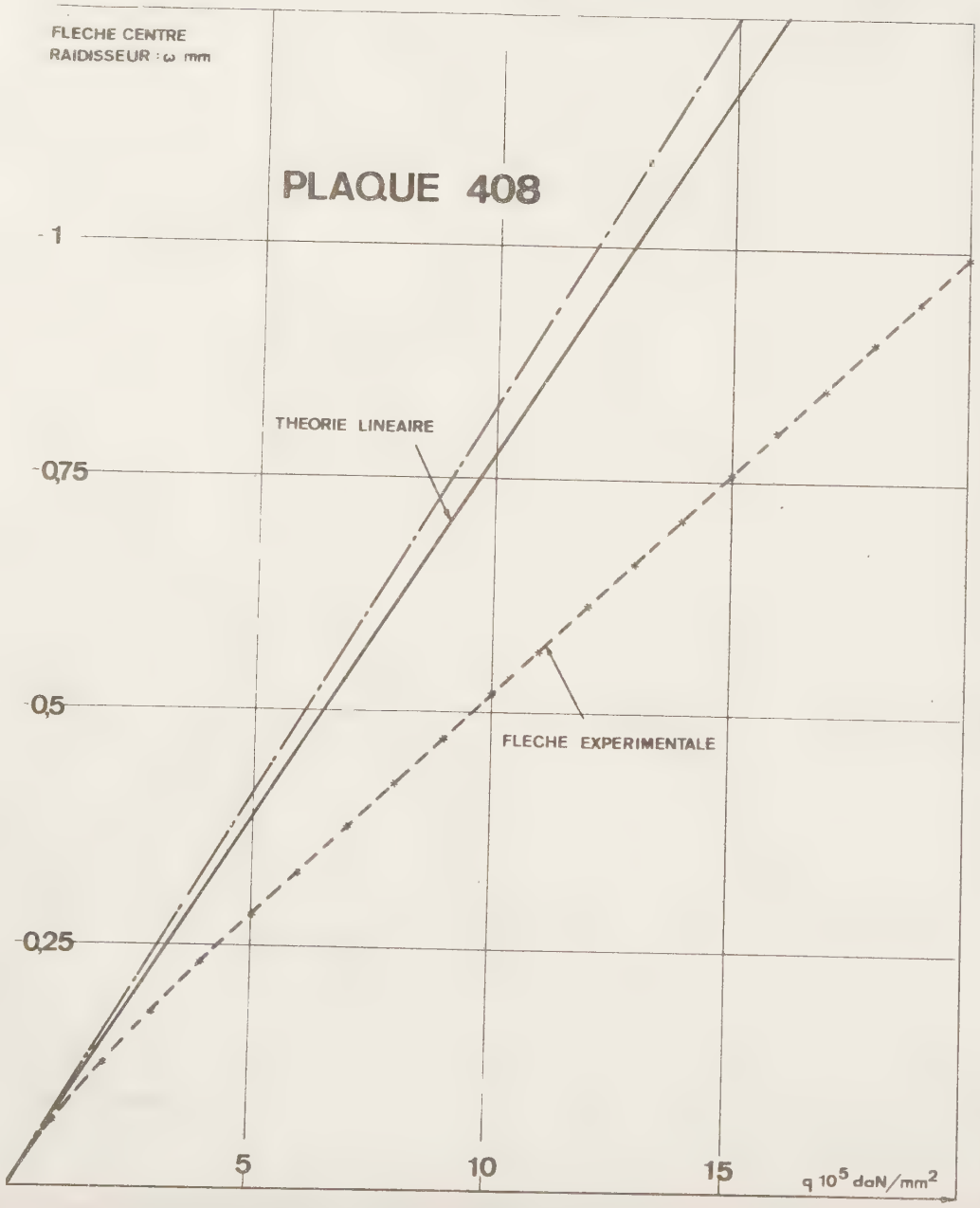
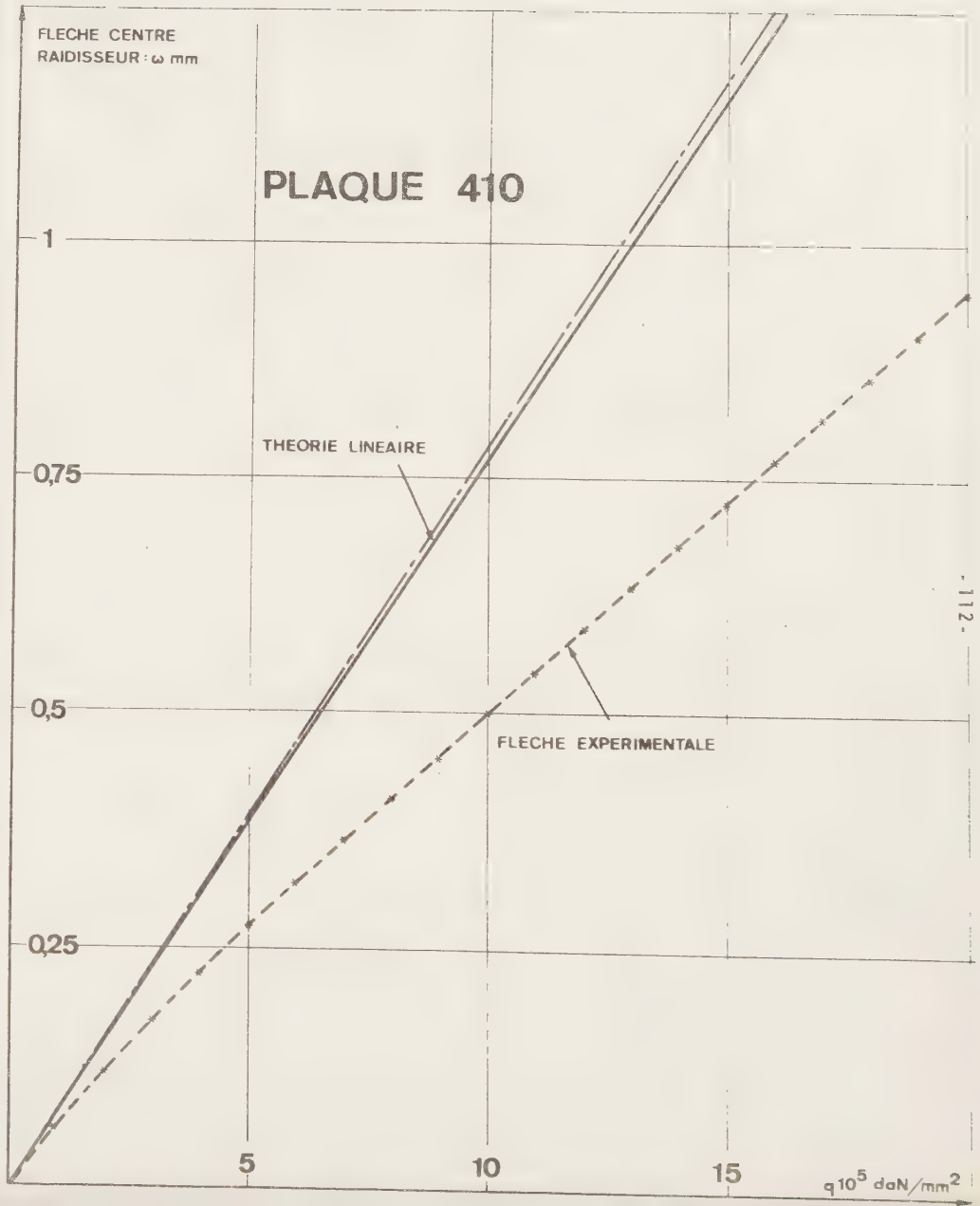

FLECHE CENTRE
RAIDISSEUR : ω mm
PLAQUE 406
1
0,75
0,5
0,25
THEORIE LINEAIRE
FLECHE EXPERIMENTALE
5
10
15
q 10⁵ daN/mm²

fig . 74

IGURE 75 - Variations de la flèche au centre des raidisseurs.

——— - ——— - ——— - ——— graphe obtenu en utilisant l'Inertie fictive correspondant à une largeur d'aile égale à trente fois l'épaisseur de la plaque





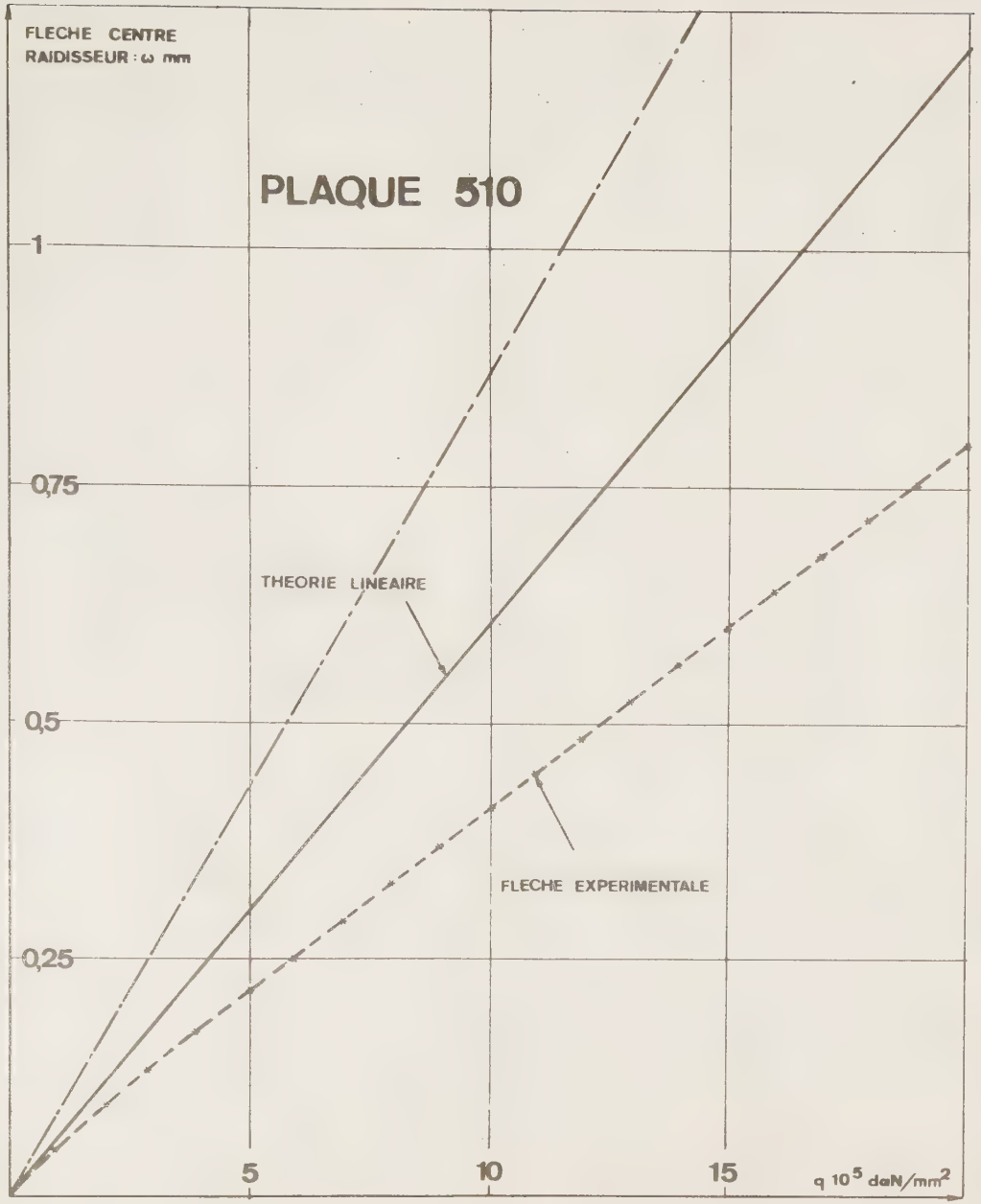

FLECHE CENTRE
RAIDISSEUR : ω mm
PLAQUE 510
1
0,75
0,5
0,25
THEORIE LINEAIRE
FLECHE EXPERIMENTALE
5
10
15
q 10⁵ daN/mm²

fig. 77

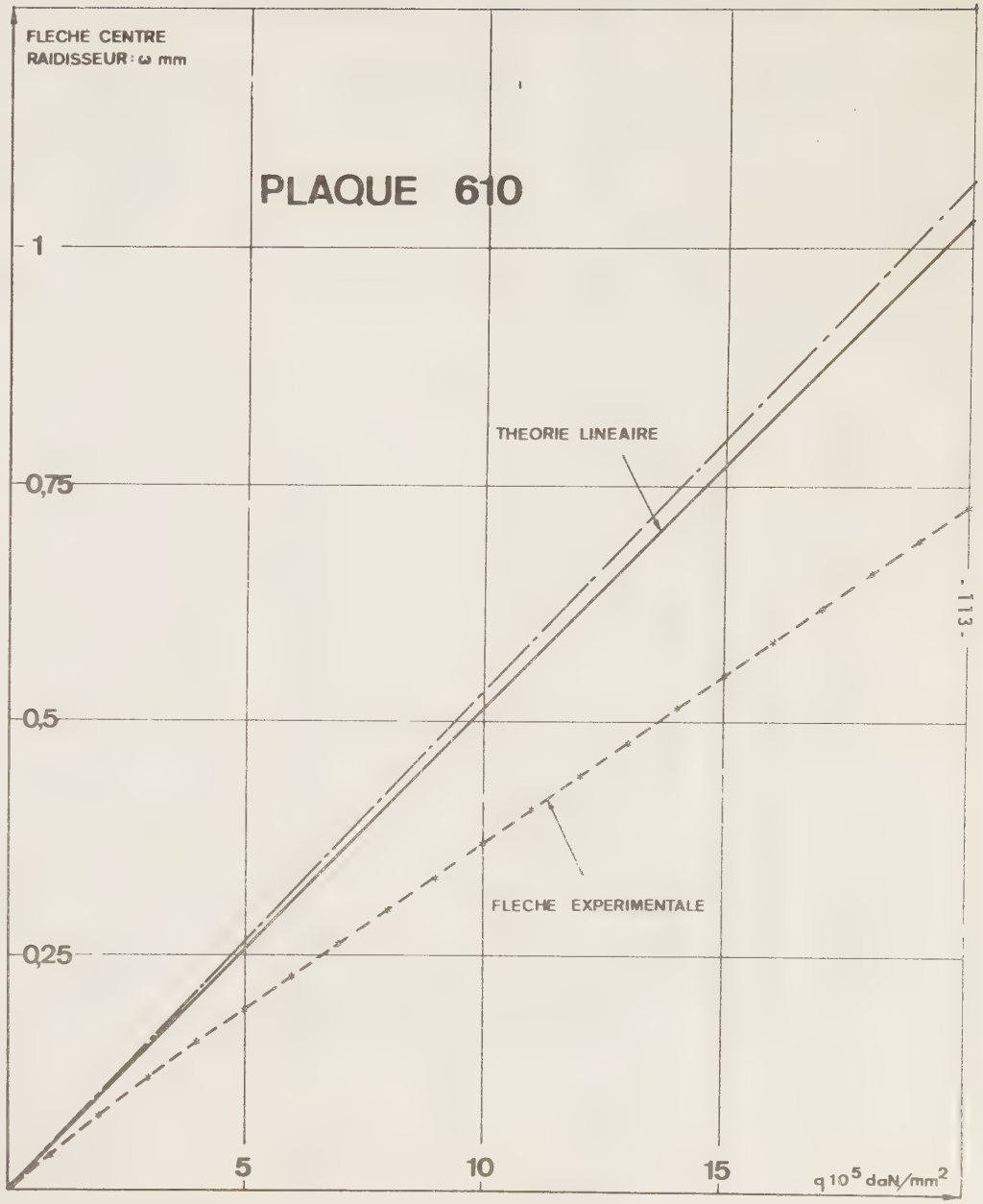

FLECHE CENTRE
RAIDISSEUR : ω mm
PLAQUE 610
1
0,75
0,5
0,25
THEORIE LINEAIRE
FLECHE EXPERIMENTALE
5
10
15
q 10⁵ daN/mm²

fig. 78

1.5.2.5 - Relevés des déformations de la plaque

Pour chaque plaque, des relevés de flèches ont été établis suivant l'axe central perpendiculaire aux raidisseurs, pour chaque pression d'essai.

Ces mesures ont permis de noter que les éléments de plaque étaient parfaitement encastrés sur les raidisseurs (rotation nulle), et que pour les grandes déformations la déformée de la plaque conservait une allure semblable à celle choisie dans le calcul théorique de l'influence de l'effet de membrane.

Les planches 83 à 86 montrent les déformations obtenues pour différentes plaques.

1.5.3 - INTERPRETATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

1.5.3.1 - Flèches au centre de la plaque et des raidisseurs

Les résultats expérimentaux montrent que les flèches au centre de chaque plaque sont inférieures à celles données par la théorie linéaire, mais restent néanmoins supérieures à celles calculées en tenant compte de l'influence de l'effet de membrane.

Cette différence provient essentiellement du fait que les conditions limites expérimentales ne reproduisent pas exactement celles imposées à la plaque théorique.

En effet, les deux côtés de la plaque solidaires des raidisseurs, ont la possibilité de se rapprocher au cours des déformations. Bien que ces déformations soient très faibles, nous avons montré au paragraphe(1.5.1.5.3), que les flèches ainsi obtenues pouvaient atteindre des valeurs très notables.

Ces déplacements seraient effectivement nuls, dans le cas d'une plaque très longue dans le sens perpendiculaire aux raidisseurs.

Pour les plaques types 210_1 et 210_2 des mesures effectuées au cours des expériences ont montré que, sous une charge correspondant à une pression constante de 10^{-4} daN/mm^2, le rapprochement central des raidisseurs était de $\frac{5}{100}$ mm en reprenant l'expression :

$$v_0 = \frac{\eta^2 \omega_0^2}{4a}$$

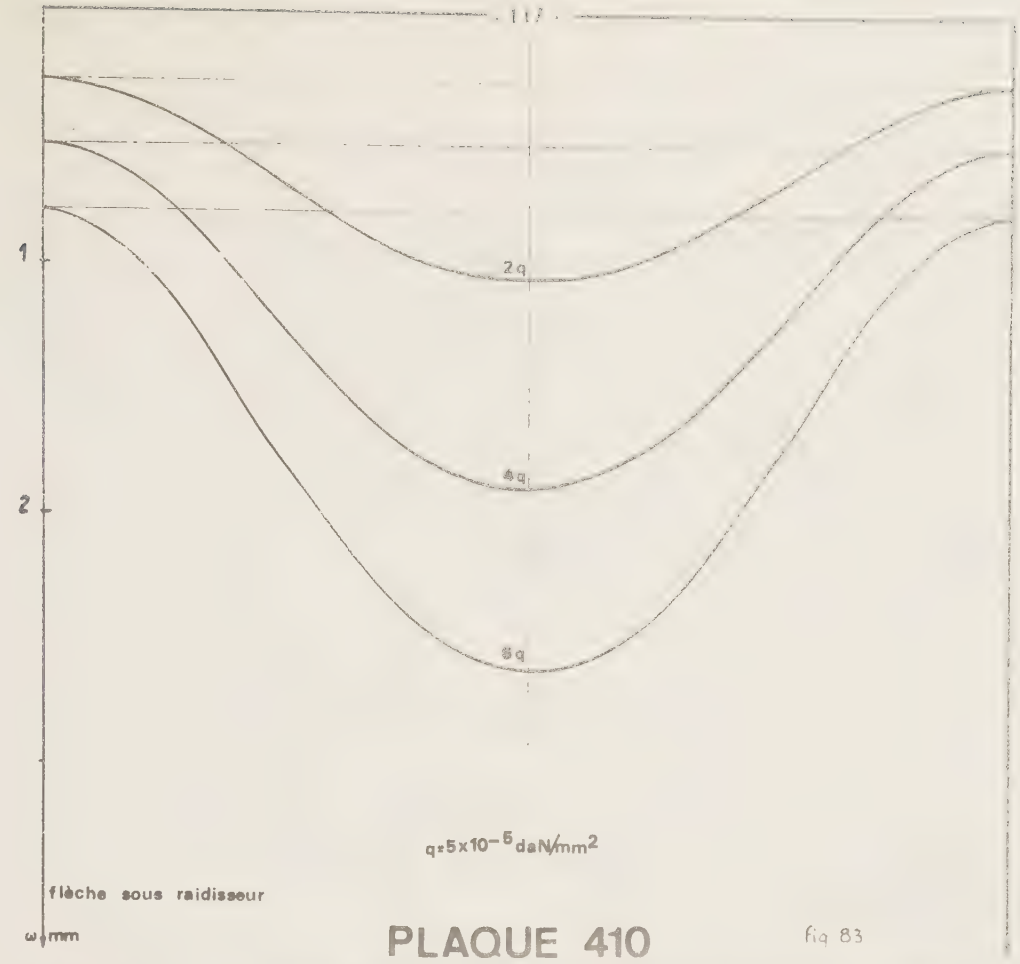
nous avons :

$$\omega_0^2 = \frac{4 a v_0}{\eta^2}$$

avec : $a = 400$ mm

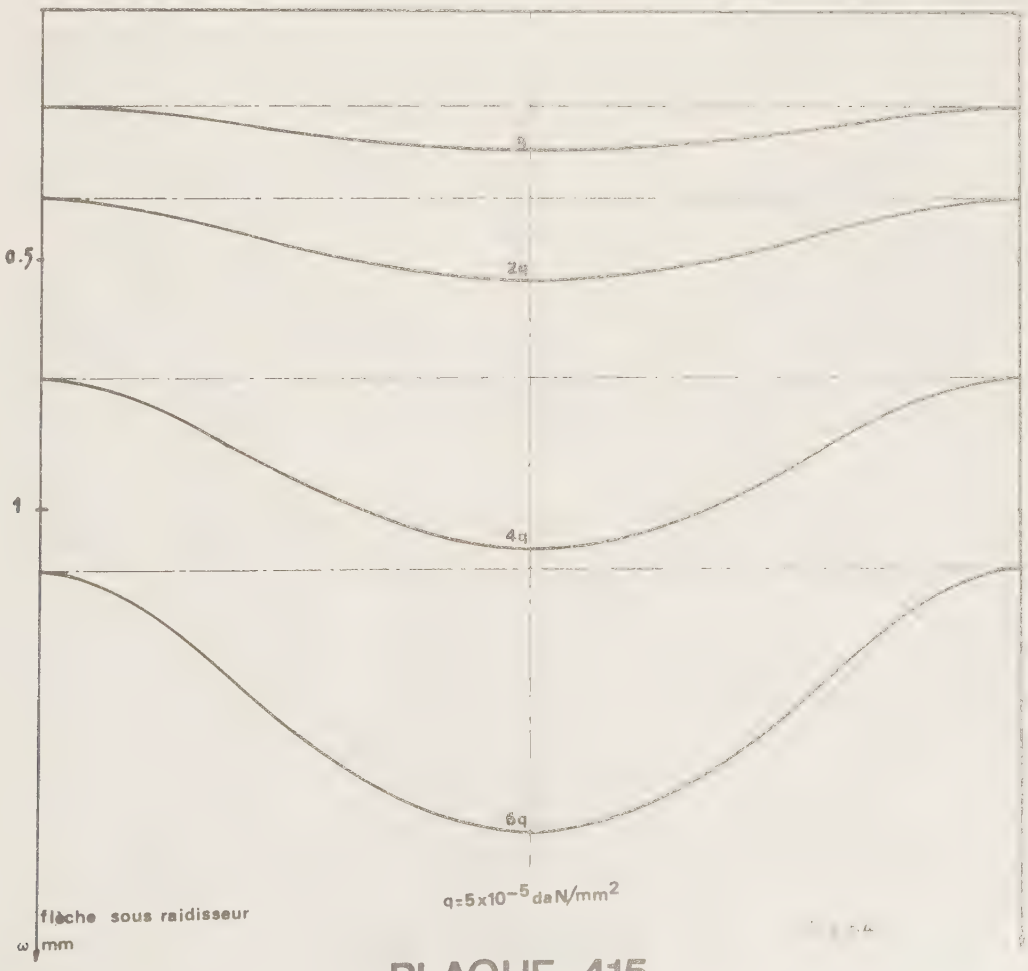
$V_0 = 5/100$ mm

FIGURES 83 à 86 - Déformations de la plaque entre deux raidisseurs



PLAQUE 410

fig 83



PLAQUE 415

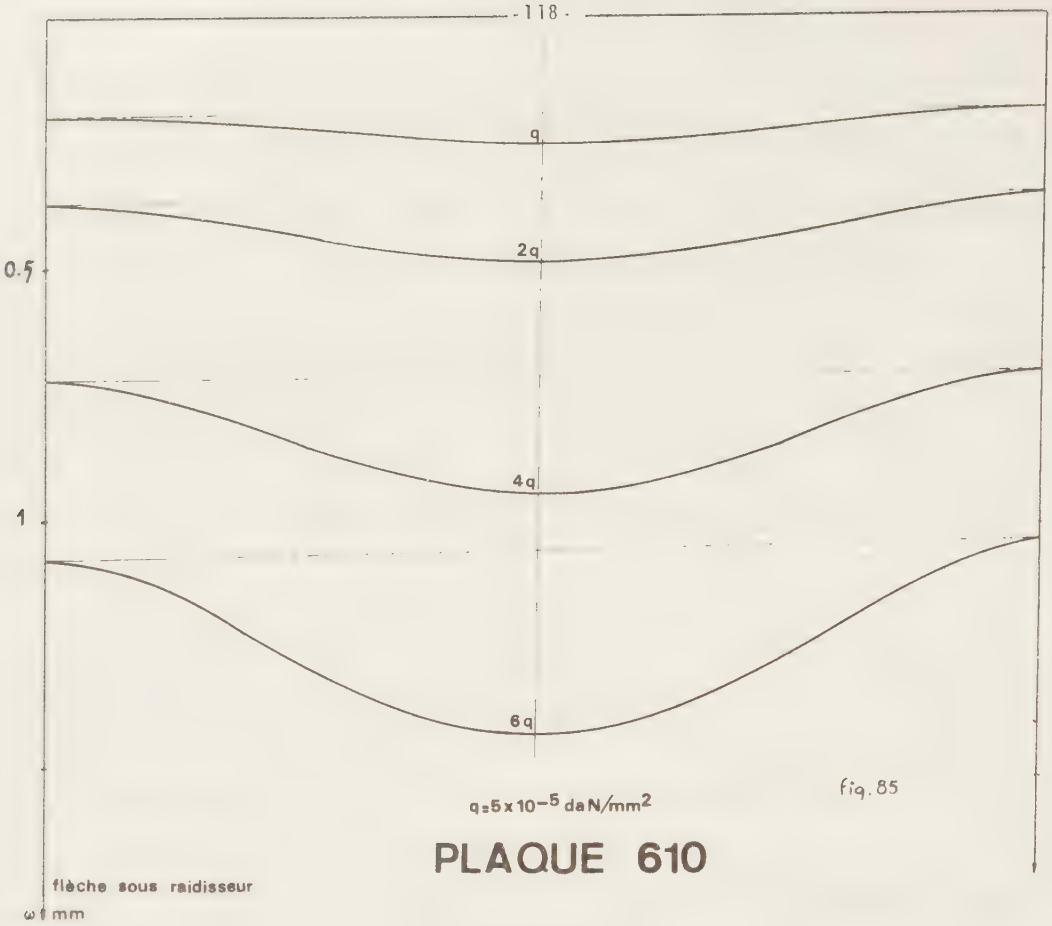


fig. 85

PLAQUE 610

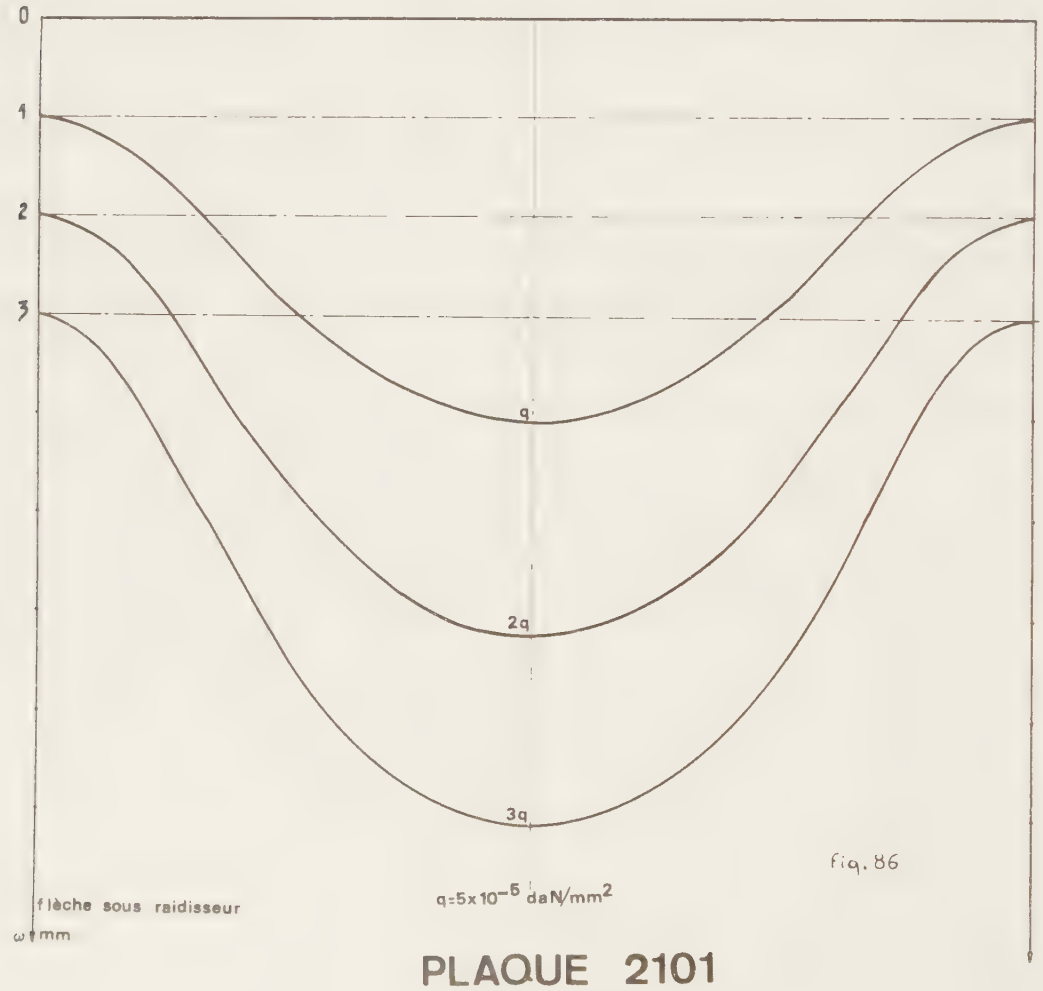


fig. 86

PLAQUE 2101

FIGURES 79 à 82 - Variations des déformations linéiques suivant la direction perpendiculaire aux raidisseurs, et passant par le centre de la plaque.

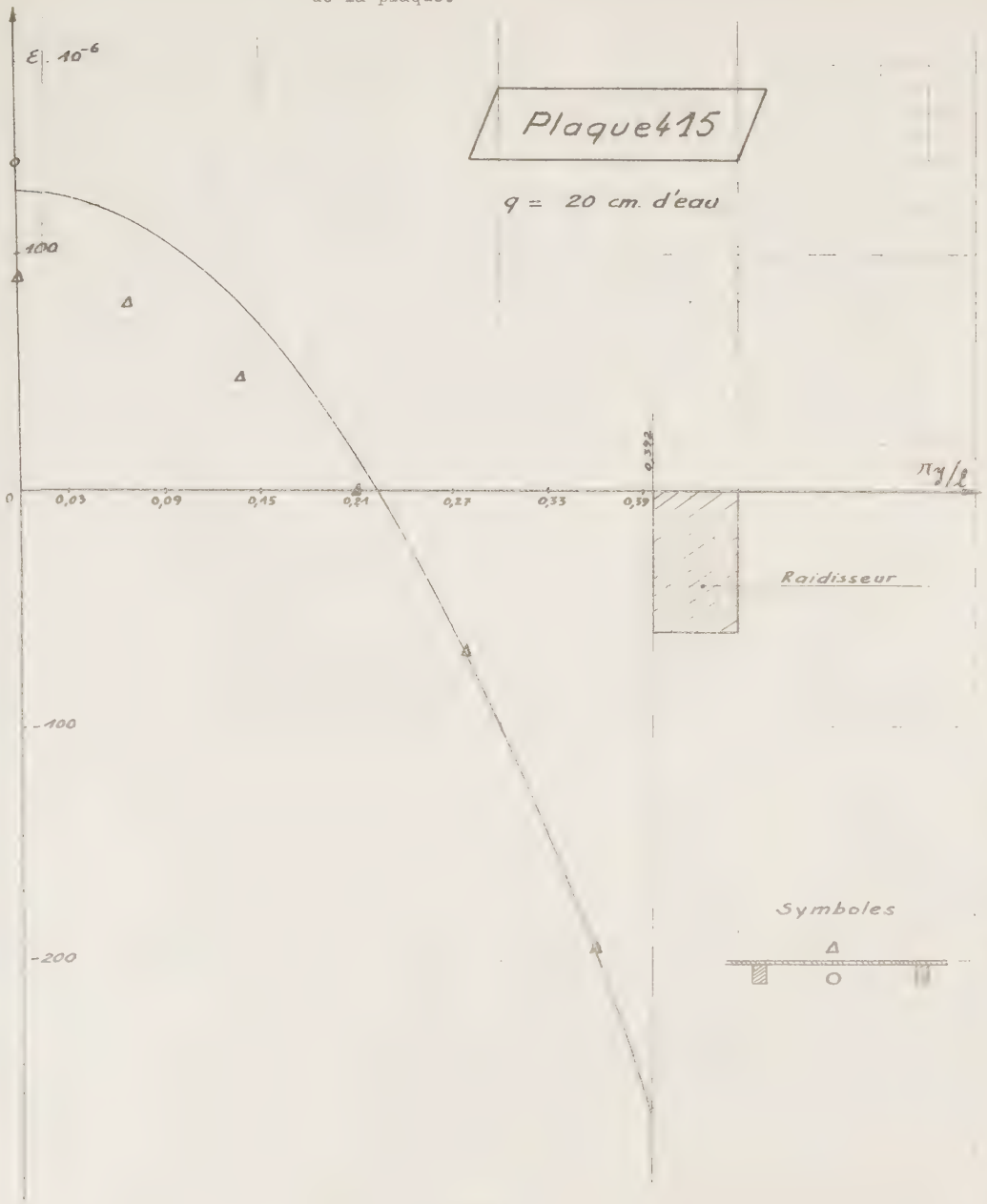


fig. 79

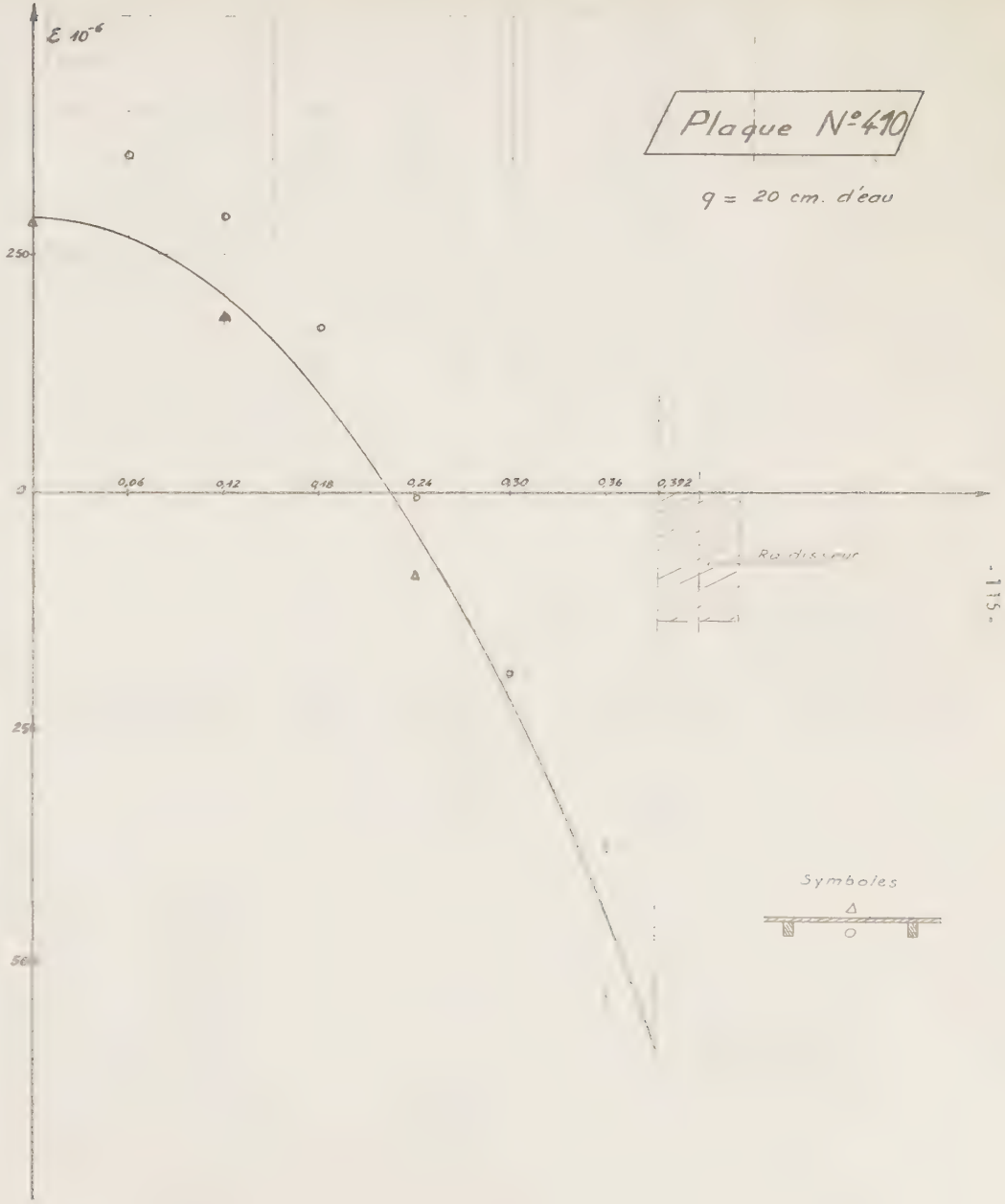


fig. 80

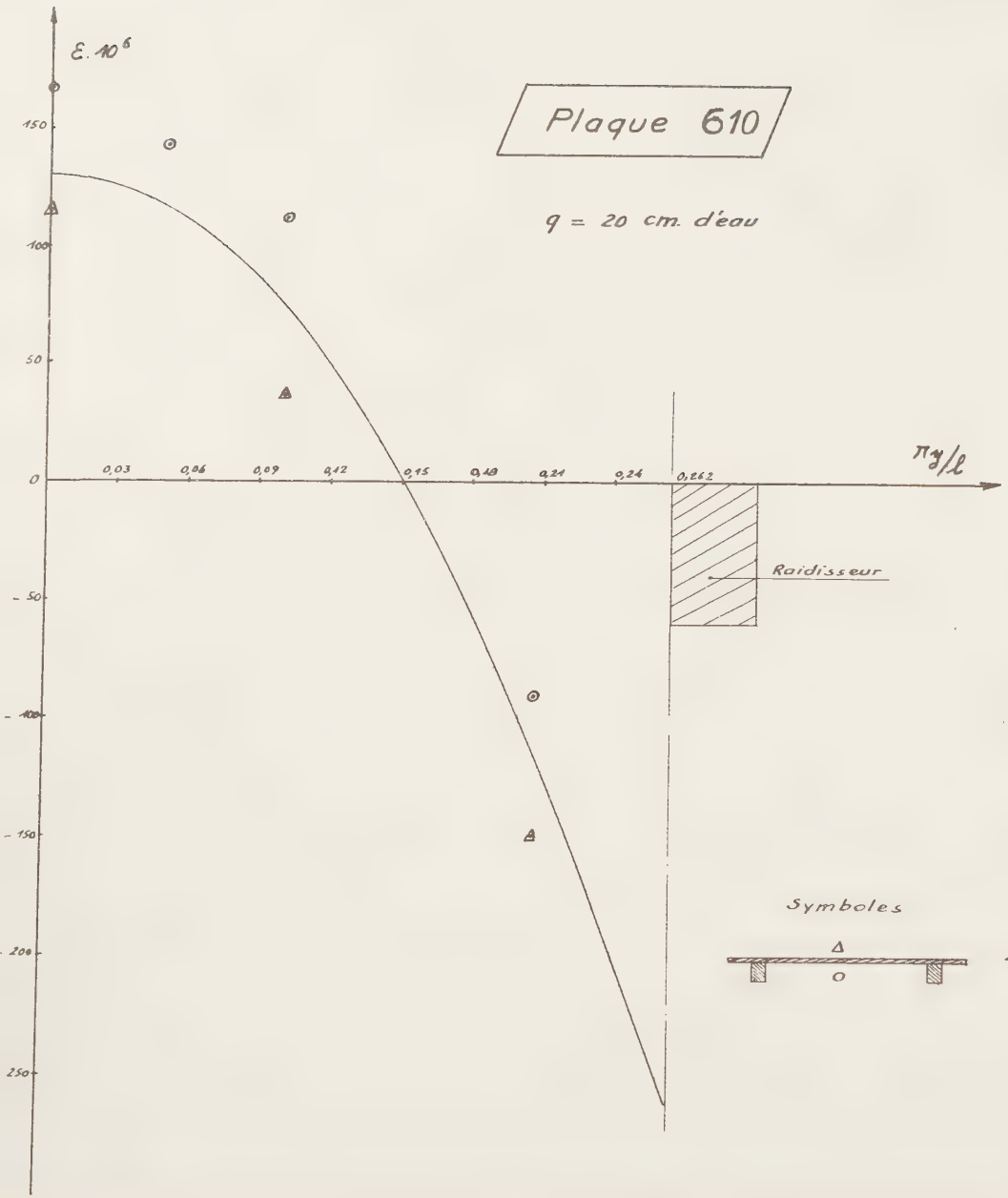

ε. 10⁶
Plaque 610
q = 20 cm. d'eau
πy/l
150
100
50
0
- 50
- 100
- 150
- 200
250
0,03
0,06
0,09
0,12
0,15
0,18
0,21
0,24
0,262
Raidisseur
Symboles
Δ
o

fig. 81

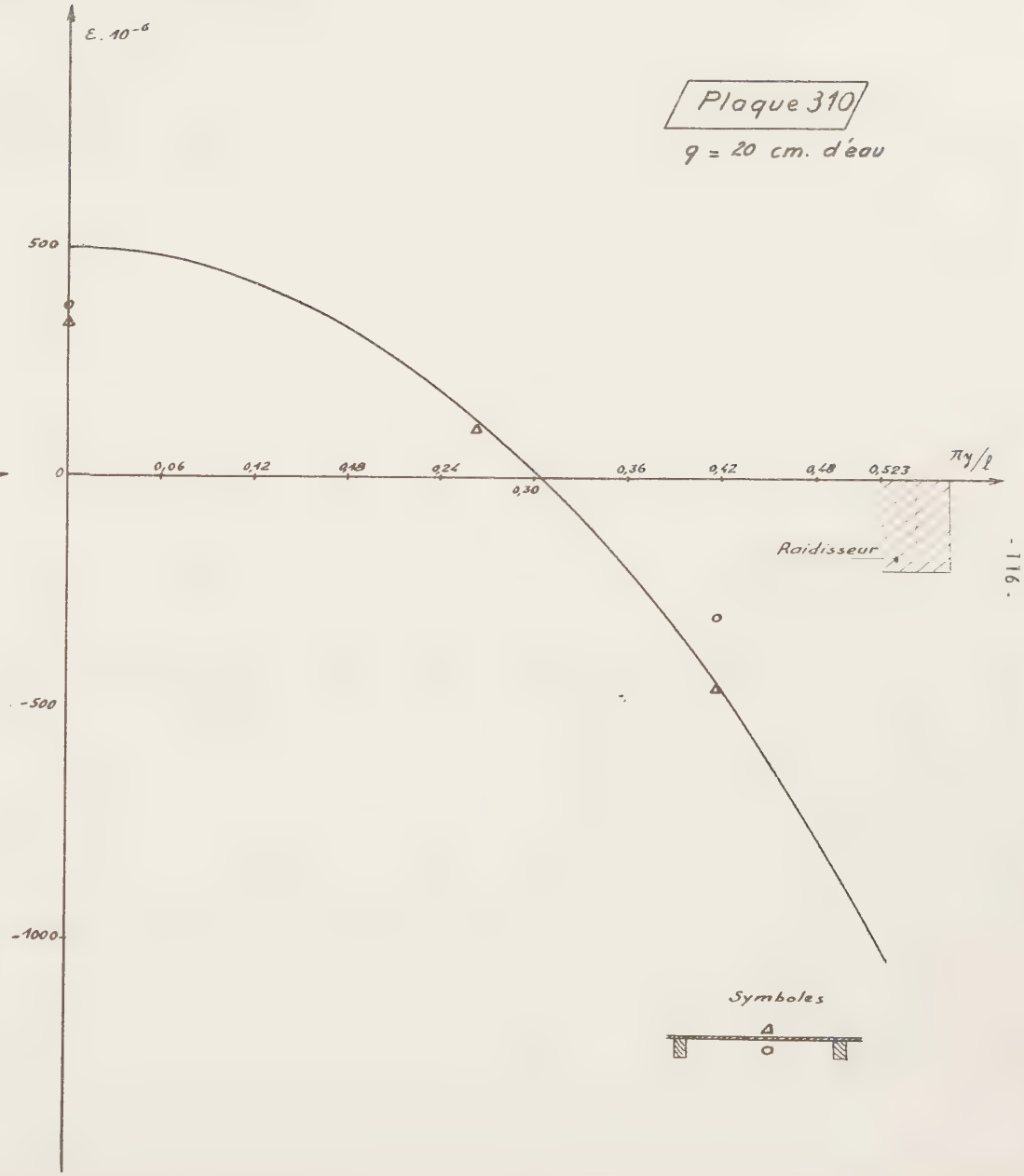

ε. 10⁻⁶
Plaque 310
q = 20 cm. d'eau
πy/l
500
0
-500
-1000
0,06
0,12
0,18
0,24
0,30
0,36
0,42
0,48
0,523
Raidisseur
Symboles
Δ
o

fig. 82

ce qui donne : $\omega_o^2 = 16 \times \frac{5}{10}$

soit : $\omega_o = 2,8$ mm

l'erreur relevée entre la valeur expérimentale et la valeur théorique avec effet de membrane est :

3,2 mm pour la plaque 210_1

3,4 mm pour la plaque 210_2

Pour les autres plaques expérimentées, les mesures de rapprochement n'ont pas été effectuées.

1.5.3.2 - Mesure des dilatations

La série des essais relative aux mesures des dilatations linéiques dûes aux effets de membrane, est dans l'ensemble peu concluante, en raison des difficultés rencontrées pour effectuer ces mesures.

Parmi ces difficultés, nous pouvons citer :

- l'épaisseur très faible des plaques qui présentent malgré les soins apportés à la fabrication, des défauts locaux de planéité préjudiciables pour effectuer des mesures précises
- les contacts des jauges placées sur la face supérieure de la plaque et de la membrane de caoutchouc assurant la mise sous pression, ont provoqué aux cours des déformations des variations très importantes dans les mesures vraisemblablement dûes à un glissement local
- les variations de température existant entre la face supérieure de la plaque en contact avec le fluide, et la face inférieure située à l'air libre. Bien que compensées en température, les jauges de déformations accusaient une légère dérive au cours des mesures.
- enfin, la mesure effectuée par la jauge de déformation correspond à une valeur moyenne sur la longueur de la grille (4 mm), une erreur dans la symétrie des emplacements peut provoquer certaines variations.

L'ensemble de ces erreurs, difficilement chiffrables (5 % environ), montre que les dilatations linéiques, dûes aux efforts normaux et qui représentent une fraction faible (inférieure à 10 %) des dilatations dûes aux moments de flexion, ne peuvent être déterminées au cours de ces essais.

On remarquera cependant que les valeurs moyennes obtenues par chaque couple de jauges, correspondent,à moins de 5 % près, aux résultats théoriques dûs aux contraintes de flexion.

ETUDE DES PLAQUES DANS LE DOMAINE PLASTIQUE

-:-:-:-:-:-:-

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

-:-:-:-:-:-

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement des plaques dans le domaine plastique.

Les recherches bibliographiques, que nous avons effectuées sur les plaques en plasticité, nous ont montré que les expériences et les publications se rapportaien essentiellement aux plaques épaisses, mais étaient, du moins à notre connaissance, inexistantes dans le cas des plaques minces.

Parmi ces travaux se rapportant au comportement des plaques orthotropes dans le domaine plastique, nous pouvons noter ceux de MM. MASSONNET et SAVE (49). Dans leur ouvrage, les auteurs ramenaient l'étude de la plaque orthotrope à celle d'une plaque isotrope fictive équivalente, ayant même charge limite. Dans le plaque fictive, la puissance dissipée et la puissance des charges, sont les puissances existant dans la plaque réelle. Cette étude, particulièrement intéressante dans le cas des dalles armées, est difficilement applicable aux plaques très minces.

MM. MASSONNET et SAVE rappellent dans leur ouvrage, que les éléments expérimentaux et théoriques, permettant de résoudre cette question, font actuellement gravement défaut dans tous les cas de plaques non circulaires.

Dans le cas particulier qui fait l'objet de notre étude, un phénomène de voilement vient se superposer au problème classique de la flexion. En outre, l'effet de membrane, qui apparait au cours des déformations, est totalement modifié dès le début de ce voilement.

Ces différents comportements nous ont conduit à poser, comme bases de calcul, certaines hypothèses définies dans les généralités de ce chapitre. Ce qui nous a amené à étudier séparément la plaque et les raidisseurs.

Pour l'étude du voilement des plaques soumises à une pression constante uniformément répartie, nous pouvons rappeler les travaux de TIMOSHENKO (54) ainsi que ceux de BLEICH (53).

Le comportement des raidisseurs, dans le domaine plastique, est étudié dans l'ouvrage de P. DELLUS (50) et dans celui de DRUCKER (51).

Cependant, nous voudrions noter que les résultats théoriques, que nous avons obtenus et qui coïncident d'une manière satisfaisante avec les résultats expérimentaux, ne peuvent en fait représenter qu'une approche sommaire du problème réel. En effet, le comportement de la plaque, dans le domaine plastique, est fonction, de la vitesse d'application des forces extérieures, des chargements antérieurs subis par la plaque et des plastifications locales pouvant intervenir au cours de la phase voilement. Ces différents paramètres n'ont pas été pris en compte dans notre étude. Enfin, un développement mathématique, non limité aux termes du premier ordre, permettrait vraisemblablement d'améliorer les résultats obtenus.

RECHERCHE THEORIQUE PERSONNELLE

SUR LE COMPORTEMENT DES PLAQUES AVEC RAIDISSEURS AU-DELA DU DOMAINE ELASTIQUE LORSQUE CES PLAQUES TRES MINCES SONT SOUMISES A UNE PRESSION CONSTANTE

-:-:-:-:-:-:-

2.2.1 - GENERALITES

Les plaques utilisées dans les expériences, soumises à une pression uniforme, peuvent prendre des flèches au centre de l'ordre de 16 fois leur épaisseur avant d'atteindre le domaine plastique.

Pour les déformations de cette importance, le comportement des plaques ne peut, en aucun cas, être étudié à l'aide des formules précédemment établies pour la théorie linéaire, ces dernières n'étant valables que dans un domaine limité à des flèches inférieures à 2 ou 3 fois l'épaisseur de la plaque.

En outre, lorsque les déformations sont très importantes, on peut noter un rapprochement des appuis, dû à la flexion des raidisseurs, dans le sens longitudinal, ce qui entraîne une diminution de l'effet de membrane. Ainsi, les flèches, relevées expérimentalement, seront plus importantes que celles calculées théoriquement.

Dans cette étude, on considère trois états successifs pour la plaque :

- le premier, intéresse les faibles déformations, en tenant compte néanmoins des forces normales. L'étude de ce domaine a fait l'objet des chapitres précédents.

- second état : au-delà d'une certaine déformation, la plaque mince qui constitue la semelle portante, subit un voilement sous l'action des forces normales et des forces de cisaillement imposées par la flexion du raidisseur. L'instabilité de cet état entraîne la disparition de l'effet de membrane. La plaque se déforme en flexion et les variations de flèches sont linéaires.

- le troisième état sera défini par le passage du domaine élastique au domaine plastique. Les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés permettant de calculer les variations de flèches et de contraintes, en fonction de la charge supportée Dans cette étude, les diagrammes contraintes-déformations relatifs aux matériaux constituant la plaque et les raidisseurs, servant de base aux calculs.

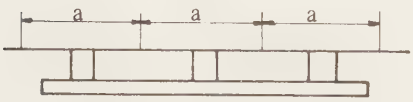
Nous désignons, dans cette étude, par voilement, un phénomène de déforma-

tions réversible, alors qu'un flambage désignerait un phénomène de déformation non réversible.

2.2.2 - DETERMINATION DE LA CHARGE CRITIQUE DE VOILEMENT

2.2.2.1 - Hypothèses

Nous considérons, dans cette étude, un élément de plaque de largeur a , placé symétriquement par rapport à un raidisseur. Les appuis simples sont situés dans le plan perpendiculaire aux raidisseurs, et sont distants de la longueur l (figure a)



– fig. a –

– fig. b –

La déformée de la plaque est prise sous la forme :

$$\omega = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{m=\infty} \omega_{mn} \sin \frac{m \pi x}{l} \sin \frac{n \pi y}{a} \qquad (99)$$

Afin d'obtenir pour la plaque des conditions limites identiques (pas de charge sur les bords libres de la plaque), dans le cas d'une charge uniformément répartie q , et dans le cas du voilement sous force de compression, la charge P est supportée par le raidisseur seul. Cette charge est équivalente à une contrainte uniformément répartie sur les sectionsdroites situées aux extrémités du raidisseur (figure b).

Lorsque la charge P augmente, la plaque et le raidisseur emmagasinent une certaine quantité d'énergie en flexion. L'égalité de cette énergie avec celle dûe au travail des forces extérieures (charge P), permet de déterminer la charge critique de voilement.

Le voilement de la plaque étant engendré par la flexion du raidisseur, cette dernière peut être obtenue, soit par flexion simple(charge répartie), soit par voilement, ce qui conduit à une relation entre la charge critique de voilement et la pression uniforme.

Le voilement de la semelle portante étant obtenu, le raidisseur continue à se déformer dans le domaine élastique, puis dans le domaine plastique. Les rela-

tions flèches-charges relatives à ces deux domaines seront explicitées à la fin de ce chapitre.

2.2.2.2 - Charge critique de voilement

2.2.2.2.1 - Energie de flexion de la plaque

La déformée de la plaque étant prise sous la forme (99), l'énergie de flexion a pour valeur

$$\Delta U = \frac{\pi^4 D}{8} a.l. \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} \omega_{mn}^2 \left[\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{a^2}\right]^2 \tag{100}$$

2.2.2.2.2 - Energie de flexion d'un raidisseur

Nous avons :

$$\Delta U_r = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2_{y=\frac{a}{2}} dx \tag{101}$$

soit :

$$\Delta U_r = \frac{\pi^4 EI}{4\, l^3} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^4 \left[\omega_{m1} - \omega_{m3} + \omega_{m5} - \cdots\right]^2 \tag{102}$$

2.2.2.2.3 - Travail des forces de compression agissant sur le raidisseur

$$\Delta T_r = \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2_{y=\frac{a}{2}} dx \tag{103}$$

soit en remplaçant ω par son expression

$$\Delta T_r = \frac{P\pi^2}{4l} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^2 \left[\omega_{m1} - \omega_{m3} + \omega_{m5} - \cdots\right]^2 \tag{104}$$

l'égalité

$$\Delta T_r = \Delta U + \Delta U_r \tag{105}$$

conduit à l'expression

$$\frac{\pi^4 Dal}{8} \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} \omega_{mn}^2 \left[\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{a^2}\right]^2 + \frac{\pi^4 EI}{4\, l^3} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^4 \left(\omega_{m1} - \omega_{m3} + \omega_{m5} - \cdots\right)^2$$

$$= \frac{P\pi^2}{4l} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^2 \left[\omega_{m1} - \omega_{m3} + \omega_{m5} - \cdots\right]^2$$

d'où

$$P = \frac{\frac{\pi^2 Dal}{2} \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} \omega_{mn}^2 \left[\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{a^2}\right]^2 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^4 \left(\omega_{m1} - \omega_{m3} + \cdots\right)^2}{\sum_{m=1}^{m=\infty} m^2 \left(\omega_{m1} - \omega_{m3} + \omega_{m5} - \cdots\right)^2}$$

posons

$$\lambda' = \frac{EI}{aD} \qquad \beta' = \frac{l}{a}$$

L'expression de P s'écrit alors

$$P = \frac{\pi^2 D}{2a\beta'} \; \frac{\sum\sum \omega_{mn}^2 \left[m^2 + \beta'^2 n^2 \right]^2 + 2\lambda' \sum m^4 (\omega_{m1} - \omega_{m3} + \omega_{m5} \cdots)^2}{\sum m^2 (\omega_{m1} - \omega_{m3} + \omega_{m5} - \cdots)^2}$$

Notons que la somme $(\omega_{m1} - \omega_{m3} + \omega_{m5} \cdots)$ représente le développement de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \omega_{mn} \sin \frac{n\pi}{2}$$

L'expression précédente de P peut s'écrire

$$P\beta'^2 \sum_m m^2 \sum_n \left(\omega_{mn} \sin \frac{n\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2 D}{2a} \left[\sum_m \sum_n \omega_{mn}^2 \left(m^2 + \beta'^2 n^2\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\lambda' \sum_m m^4 \sum_n \left(\omega_{mn} \sin \frac{n\pi}{2}\right)^2 \right] = 0$$

La dérivée de cette expression par rapport aux coefficients ω_{mn} est représentée par la formule

$$P\beta'^2 m^2 \sin \frac{n\pi}{2} \sum_p \omega_{mp} \sin \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi^2 D}{2a} \left[\omega_{mn} \left(m^2 + \beta'^2 n^2\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\lambda' m^4 \sin \frac{n\pi}{2} \sum_p \omega_{mp} \sin \frac{p\pi}{2} \right] = 0$$

soit pour $m = 1$ $n = 1$

$$P\beta'^2 (\omega_{11} - \omega_{13} + \omega_{15} - \cdots) - \frac{\pi^2 D}{2a} \left[\omega_{11} (1 + \beta'^2)^2 + 2\lambda' (\omega_{11} - \omega_{13} + \omega_{15} - \cdots) \right] = 0$$

$m = 1$ $n = 2$

$$- \frac{\pi^2 D}{2a} \left[\omega_{12} (1 + 4\beta'^2)^2 \right] = 0$$

Pour les plaques étudiées, les coefficients β' sont généralement grands

$$3 < \beta' < 6$$

Ainsi, la première équation obtenue en posant $m = n = 1$, donne une approximation satisfaisante de la charge critique de voilement.

Cette équation s'écrit en posant $\omega_{11} \neq 0$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a} \cdot \frac{(1 + \beta'^2)^2 + 2\lambda'}{2\beta'^2} \qquad (106)$$

soit

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a} \cdot k$$

k représentant le coefficient de voilement

2.2.3 - RELATION ENTRE LA CHARGE CRITIQUE DE VOILEMENT ET LA CHARGE CONSTANTE

2.2.3.1 - Energie prise par le raidisseur en compression

Cette expression de l'énergie est exprimée par la relation (104). En reportant, dans cette équation, l'expression de la charge critique (106), on obtient en limitant les développements aux termes du premier ordre

$$\Delta T_r = \frac{\pi^4 D k}{4 a l} \omega_{11}^2 \qquad m = n = 1 \qquad (107)$$

2.2.3.2 - Travail des forces extérieures - Charge répartie q

Au cours de la déformation, les points de la plaque situés à égale distance des raidisseurs, subissent des déplacements du même ordre de grandeur que ceux situés à la même abscisse, sur les raidisseurs.

Le travail de la charge q a donc pour valeur

$$T_c = \frac{1}{2} \int_0^l q_0 \omega_{11} \sin \frac{\pi x}{l} \qquad (108)$$

soit

$$T_c = q_0 \omega_{11} \frac{l}{\pi}$$

avec

$$q_0 = q \cdot a$$

La valeur donnée par (108) est inférieure à la valeur réelle. Une borne supérieure peutêtre rapidement obtenue en considérant la flèche au centre de la plaque.

Nous obtenons alors

$$T_c' = q_0 \omega_0 \frac{l}{\pi} \qquad (109)$$

Pour un très grand nombre de plaques, l'effet de membrane n'est pas prépondérant, au cours des premières déformations. Dans ce cas, le rapport entre la flèche au centre de la plaque et la flèche ω_{11} au centre du raidisseur, est donné par les coefficients α et α' déterminés au paragraphe

$$\frac{\omega_0}{\omega_{11}} = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

Dans les autres cas, qui correspondent à des plaques très minces, renforcées par des raidisseurs largement espacés, il convient de déterminer le rapport $\frac{\omega_0}{\omega_{11}}$ à partir des résultats obtenus au paragraphe 1.3.3, en tenant compte des termes non linéaires.

2.2.3.3. - Relation entre Pcr et q

L'instabilité de la plaque est obtenue lorsque le travail des forces extérieures atteint une valeur égale à celle de l'énergie accumulée dans le raidisseur, par la charge critique.

Ainsi, il vient
$$T_c = \Delta T_r \tag{110}$$

$$q_0 \omega_{11} \frac{l}{n} = \frac{n^4 Dk}{4al} \omega_{11}^2$$

soit
$$\omega_{11} = \frac{4a^2 l^2}{n^5 Dk} q_0$$

ou
$$\omega_{11} = \frac{4}{k \beta'^2 n^5} \cdot \frac{q_0 l^4}{D} \tag{111}$$

Pour les applications numériques, la valeur réelle de T adoptée sera la moyenne des veleurs minimum et maximum précédemment établies.

2.2.4 - FLEXION AU-DELA DU VOILEMENT

2.2.4.1 - Flèche au centre du raidisseur

En conservant pour le travail des forces extérieures l'expression (108), nous obtenons
$$T_c = \Delta U_r + \Delta U \tag{112}$$

avec ΔU_r = Energie de flexion du raidisseur
ΔU = Energie de flexion de la plaque

soit :
$$q_0 \omega_{11} \frac{l}{n} = \frac{n^4 EI^*}{4 l^3} \omega_{11}^2 + \frac{n^4 Da}{8 l^3} \omega_{11}^2 \left[1 + \beta'^2 \right]^2$$

$$\omega_{11} = \frac{q_0 l^4}{EI^*} \cdot \frac{8}{n^5} \left[\frac{1}{2 + \frac{(1+\beta'^2)^2}{\lambda'}} \right] \tag{113}$$

avec :
$$\lambda' = \frac{EI^*}{Da}$$

Cette expression de la flèche ω_{11} présentée sous une forme différente, est identique à celle obtenue dans le paragraphe précédent. Ceci en raison des relations (105) (110) (112)

2.2.4.2 - Remarques sur l'expression de la flèche

La formule précédente (113) donne la flèche au centre du raidisseur en

fonction de la charge q_0 (charge uniformément répartie sur une largeur a et par unité de longueur) lorsque l'élément de plaque compris entre deux raidisseurs s'est déformé par voilement, et, qu'ainsi, l'effet de membrane est annulé.

Cette expression se présente sous la forme :

$$\omega_{11} = \frac{q_0 l^4}{EI} \cdot \frac{8}{\pi^5} \left[\frac{1}{2 + \frac{(1+\beta'^2)^2}{\lambda'}} \right]$$

Si l'on considère uniquement le premier terme du dénominateur de la fraction, ce qui revient à admettre que $\lambda' \to \infty$ donc, que la rigidité D de la plaque est nulle, le système étudié est constitué par un raidisseur seul, et l'expression précédente s'écrit :

$$\omega_{11} = \frac{q_0 l^4}{EI} \cdot \frac{4}{\pi^5}$$

soit :

$$\omega_{11} = \frac{5.03}{384} \cdot \frac{q_0 l^4}{EI^*}$$

et représente la flèche au centre d'une poutre uniformément chargée avec

$$I = \frac{t H^3}{12}$$ Inertie du raidisseur par rapport à l'axe de flexion

Pour des valeurs de λ' et β' quelconques, l'expression générale de peut se mettre également sous la forme :

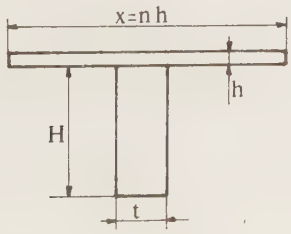
$$\omega_{11} = \frac{5}{384} \frac{q_0 l^4}{E I_0}$$

en posant :

$$I_0 = I \left[1 + \frac{(1+\beta'^2)^2}{2\lambda'} \right] \qquad \text{(a)}$$

Ainsi, l'énergie interne absorbée par l'élément de plaque, conduit à une augmentation de l'inertie du raidisseur.

Cette augmentation correspond à une certaine largeur d'aile ficitve, qui, ajoutée au raidisseur, conduit à une inertie identique à celle donnée par (a)



Dans la calcul suivant, nous avons posé :

$$x = n\,h$$

h représentant l'épaisseur de la plaque définie à partir des valeurs de I et le coefficient n a été calculé pour différentes valeurs de β', λ', et pour des raidisseurs dont les dimensions sont les suivantes :

t x H = 12 x 25 mm

et t x H = 6 x 30 mm

largeur entre appuis : $l = 1000$ mm

les résultats obtenus sont portés dans les tableaux page 131 , a , x et h sont donnés en mm, les autres coefficients étant sans dimension.

Conclusion :

La largeur x est bornée supérieurement à l'entraxe a , il apparaît ainsi que l'expression (a) ne pourra être adoptée que dans le cas où le produit $x = nh$ reste inférieur à a .

Lorsque β' croît, c'est-à-dire lorsque le nombre de raidisseurs augmente, cette borne tend à se déplacer vers les grandes valeurs de λ' , qui correspondent à des plaques très minces.

2.2.4.3 - Flèche au centre de la plaque

Au delà du voilement, nous avons admis par hypothèse, que la flèche au centre de la plaque était proportionnelle à celle du milieu du raidisseur, les termes provenant de l'effet de membrane étant nuls.

$$\omega_{11} = \frac{\alpha'}{\alpha}\,\omega_0 \qquad (114)$$

Le tabelau ci-dessous donne les valeurs expérimentales et théoriques (calculées à partir de l'expression 114) du rapport $\frac{\omega_{11}}{\omega_0}$ pour différentes plaques utilisées au cours des essais

Plaque N°	610	510	412	420	414	406	210
Théorique	1,186	1,31	1,47	1,32	1,45	6,3	9,2
Expériment.	1,18	1,26	1,35	1,27	1,38	1,46	1

On note de grandes divergences pour les plaques 406 et 210, qui correspondent à des ensembles pour lesquels le voilement est important (raidisseurs espacés ou plaque mince), et les flèches au centre sont profondément modifiées par les déformations locales comme le montre, par exemple, le relevé des déformations ci-après effectué sur la plaque 210.

$$\lambda' = \frac{EI^*}{aD} \quad ; \quad \beta' = \frac{1}{a}$$

$rH = 12.25$

β'	a	λ'	100	150	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2	500	x	19,5	17,0	15,5	13,5	12,3	11,4	10,7	10,2	9,8	9,4	9,0
		h	1,50	1,31	1,19	1,04	0,94	0,88	0,82	0,78	0,75	0,72	0,69
		n	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
3	333	x	31,0	22,5	17,7	15,5	14,1	13,1	12,3	11,7	11,2	10,7	10,4
		h	1,72	1,50	1,36	1,19	1,08	1,01	0,94	0,90	0,86	0,83	0,80
		n	18	15	13	13	13	13	13	13	13	13	13
4	250	x	113	71,2	55,7	39,4	31,0	26,6	22,9	20,8	18,9	17,3	16,7
		h	1,89	1,65	1,50	1,31	1,19	1,11	1,04	0,99	0,94	0,91	0,88
		n	60	43	37	30	26	24	22	21	20	19	19
5	200	x	2125	315	183	107	79,8	65,7	56,2	49,1	43,9	40,2	36,9
		h	2,04	1,78	1,62	1,41	1,28	1,19	1,12	1,06	1,02	0,98	0,94
		n	1049	177	113	76	62	55	50	46	43	41	39
6	166	x	50611	30461	4491	414	231	166	133	112	98	87	79
		h	2,17	1,89	1,72	1,50	1,36	1,26	1,19	1,13	1,08	1,04	1
		n	27914	16059	2606	275	169	131	112	99	91	84	79
8	125	x										651	491
		h				x >	125					1,14	1,10
		n										567	443

$rH = 6.30$

β'	a	λ'	100	150	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2	500	x	10,0	8,76	7,96	6,96	6,32	5,87	5,52	5,24	5,01	4,82	4,65
		h	1,43	1,25	1,13	0,99	0,90	0,83	0,78	0,75	0,71	0,69	0,66
		n	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3	333	x	19,6	14,3	11,7	9,10	7,23	6,71	6,32	6	5,74	5,52	5,33
		h	1,64	1,43	1,30	1,13	1,03	0,95	0,90	0,85	0,82	0,79	0,76
		n	12	10	9	8	7	7	7	7	7	7	7
4	250	x	75,8	47,3	35,8	25,0	20,4	16,9	14,9	13,2	12,6	11,3	10,9
		h	1,80	1,57	1,43	1,25	1,13	1,05	0,99	0,94	0,90	0,86	0,83
		n	42	30	25	20	18	16	15	14	14	13	13
5	200	x	2350	215	122	70,1	52,7	42,1	36,4	31,5	28,2	26,1	24,4
		h	1,94	1,79	1,54	1,34	1,22	1,13	1,07	1,01	0,97	0,93	0,90
		n	1208	127	79	52	43	37	34	31	29	28	27
6	166	x	62673	33003	5508	281	152	108	86,4	73,5	64,1	56,6	51,8
		h	2,96	1,80	1,64	1,43	1,30	1,21	1,13	1,08	1,03	0,99	0,96
		n	30305	18268	3356	196	117	90	76	68	62	57	54
8	125	x											
		h				x >	125						
		n											

fig . 89

2.2.5 - APPLICATION

2.2.5.1 - Rappel des caractéristiques de la plaque 610

Nombre de raidisseurs 6 dimensions 25 x 12 mm

Longueur entre appuis 794 mm

Entre axes des raidisseurs 138 mm

Module d'élasticité 7500 daN/mm^2

Coefficients caractéristiques :

$$\lambda = \frac{EI^*}{lD} = 235 \qquad \beta' = \frac{l}{a} = 6$$

$$\lambda' = \frac{EI^*}{aD} = 1410$$

$$\alpha = 100 \cdot 10^{-7} \qquad \alpha' = 91 \cdot 10^{-7}$$

2.2.5.2 - Application numérique

2.2.5.2.1 - Coefficient de voilement

(105) $\longrightarrow$

$$k = \frac{(1+\beta'^2)^2 + 2\lambda'}{2\beta'^2}$$

$$k = 58$$

2.2.5.2.2 - Valeur de ω_{11}

(110) $\longrightarrow$

$$\omega_{11} = \frac{4}{k\beta'^2\eta 5} \cdot \frac{ql^4}{D}$$

valeur minimum

$$\omega_{11} = \frac{4}{58 \cdot 36 \cdot 305} \cdot \frac{ql^4}{D} = 63 \cdot 10^{-7} \frac{ql^4}{D}$$

valeur moyenne

$$\omega_{11} = 63 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha'} + 1\right) 10^{-7} \frac{ql^4}{D}$$

$$\omega_{11} = 66,2 \cdot 10^{-7} \frac{ql^4}{D}$$

2.2.5.2.3 - Valeur de ω_0 - flèche au centre de la plaque

$$\omega_0 = \frac{\alpha}{\alpha'} \omega_{11}$$

$$\omega_0 = 72 \cdot 10^{-7} \frac{ql^4}{D}$$

2.2.5.2.4 - Flèche au centre de la plaque au delà du voilement

(112) $\longrightarrow$

$$\omega_{11} = \frac{q_0 l^4}{EI^*} \frac{8}{\pi^5} \cdot \left[\frac{1}{2 + \frac{(1+\beta'^2)^2}{\lambda'}} \right]$$

$$\omega_{11} = \frac{q_0 l^4}{EI^*} \cdot \frac{8}{\pi^5} \cdot \frac{1}{2 + \frac{(1+36)^2}{\lambda'}}$$

$$\omega_{11} = 88 \cdot 10^{-4} \frac{q_0 l^4}{EI^*} \simeq \frac{3.38}{384} \cdot \frac{q_0 l^4}{EI^*}$$

Afin de conserver la même échelle pour les cahrges, nous pouvons écrire l'expression de ω_{11} sous la forme

$$\omega_{11} = \frac{3.38}{384} \cdot \frac{1}{\lambda'} \frac{ql^4}{D}$$

$$\omega_{11} = 63 \cdot 10^{-7} \frac{ql^4}{D}$$

Cette valeur correspond à la valeur minimum du travail des forces extérieures. En prenant la valeur moyenne de ce travail, nous obtenons :

$$\omega_{11} = 63 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{\alpha'} + 1 \right] \frac{ql^4}{D}$$

soit :

$$\omega_{11} = 66,2 \cdot 10^{-7} \frac{ql^4}{D}$$

La flèche au centre de la plaque ω_0 a pour valeur :

$$\omega_0 = \frac{\alpha}{\alpha'} \omega_{11}$$

soit :

$$\omega_0 = 72 \; 10^{-7} \frac{ql^4}{D}$$

2.2.6 - COMPORTEMENT DE LA PLAQUE DANS LE DOMAINE PLASTIQUE

2.2.6.1 - Caractéristiques du matériau

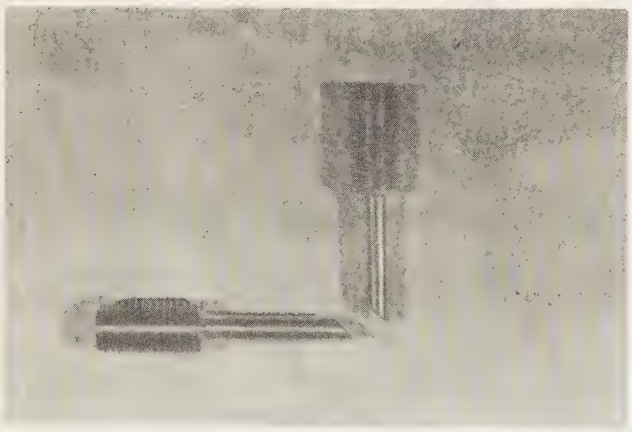
Les plaques et les raidisseurs utilisés pour les expériences, sont réalisés en alliage d'aluminium - Type A U 4 G.

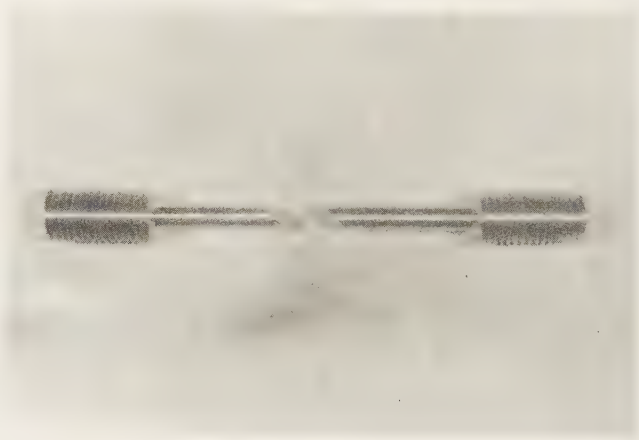
Les caractéristiques, de ce matériau, obtenues par différents essais de traction et de flexion, ont pour valeurs moyennes :

Module d'élasticité	E	=	7500	daN/mm^2	
Limite élastique	σ_E	=	35	daN/mm^2	Moyenne de 10 essais
Limite de rupture	σ_r	=	50	daN/mm^2	" "
Allongement relatif maximum		=	$\frac{15}{100}$		

Les variations des déformations, en fonction des contraintes (essai de traction), sont représentées par une courbe qui ne possède pas de palier correspondant à une augmentation des allongements à charge constante. La courbe représentative s'infléchit progressivement, et passe par un maximum situé au voisinnage du point de rupture. (Voir figure 90)

Ce matériau, dont la courbe de traction a les caractéristiques de celles des métaux ductiles, présente une rupture sans striction. La cassure s'effectue à 45° de l'axe de traction, ce qui correspond à une rupture au cisaillement.





On admet que le comportement de ce matériau est identique en compression et en traction. fig 91

2.2.6.2 - Flexion dans le domaine plastique

Considérons un élément de poutre de longueur dx , soumis à un moment de flexion M. Dans l'hypothèse où une section droite este plane après déformation, l'allongement relatif d'une fibre située à la distance x de l'axe neutre x est proportionnel à x , et la rotation relative des deux sections

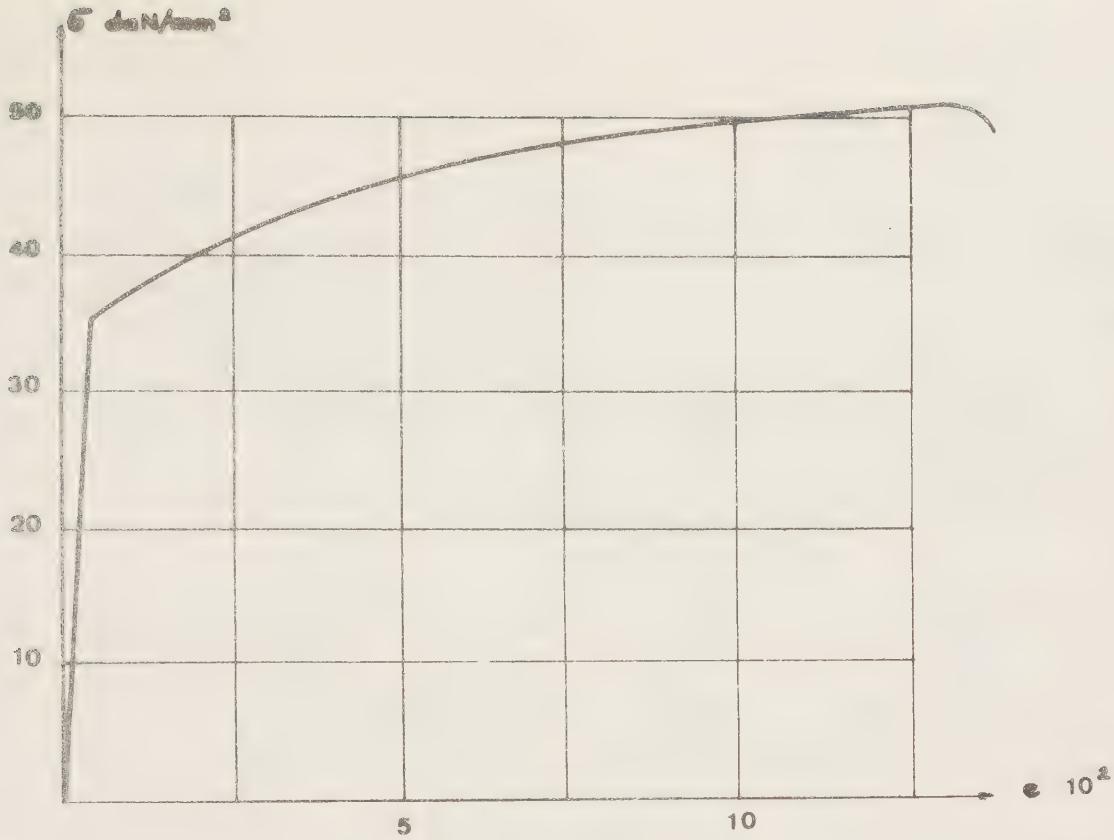


FIG 90 ESSAI DE TRACTION

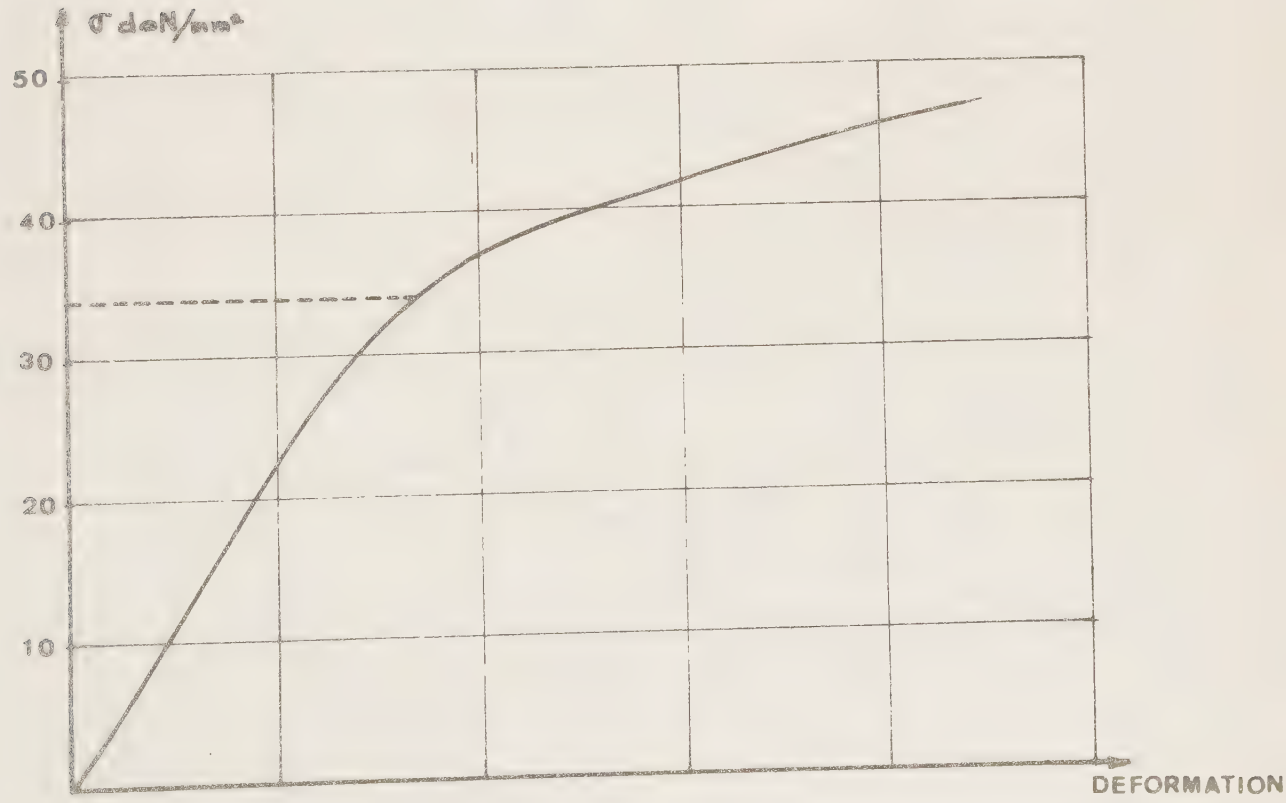
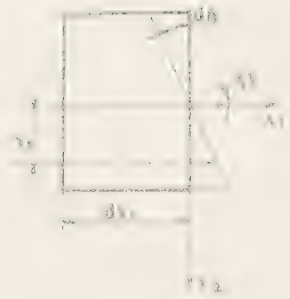


FIG 91 ESSAI DE COMPRESSION



$$e_1 = - x_2 \frac{d\theta}{dx_1} \qquad (115)$$

L'axe x_3 passe par le centre de gravité de la section, dans le cas particulier où la courbe de traction est identique en traction et en compression.

Le moment de flexion M est équivalent au moment résultant des contraintes sur la section droite

ainsi : $\int_S \sigma_1 . x_2 . ds = M$

soit : $\int_S \sigma_1 . x_2 \, b \, dx_2 = M$ avec $ds = b \, dx_2$

b représentant la largeur de la section au point d'ordonnée x_2

L'expression (115) de e_1 peut s'écrire sous la forme :

$$x_2 = - e_1 \frac{dx_1}{d\theta}$$

et

$$dx_2 = - \frac{dx_1}{d\theta} . de_1$$

en reportant ces valeurs dans l'équation d'équilibre, il vient :

$$\int_{-e_1 max}^{e_1 max} \left(\frac{dx_1}{d\theta}\right)^2 . b . \sigma_1 \, e_1 \, de_1 = M \qquad (116)$$

e_1 max représentant l'allongement relatif maximum de la fibre supérieure

Si h est la hauteur de la poutre

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-2 \, e_1 max}{h} = \frac{-d}{h} \qquad \text{avec } d = 2 e_1 max \qquad (117)$$

d'où l'expression de (116)

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{h^2}{d^2} . b . \sigma_1 . e_1 \, de_1 = M$$

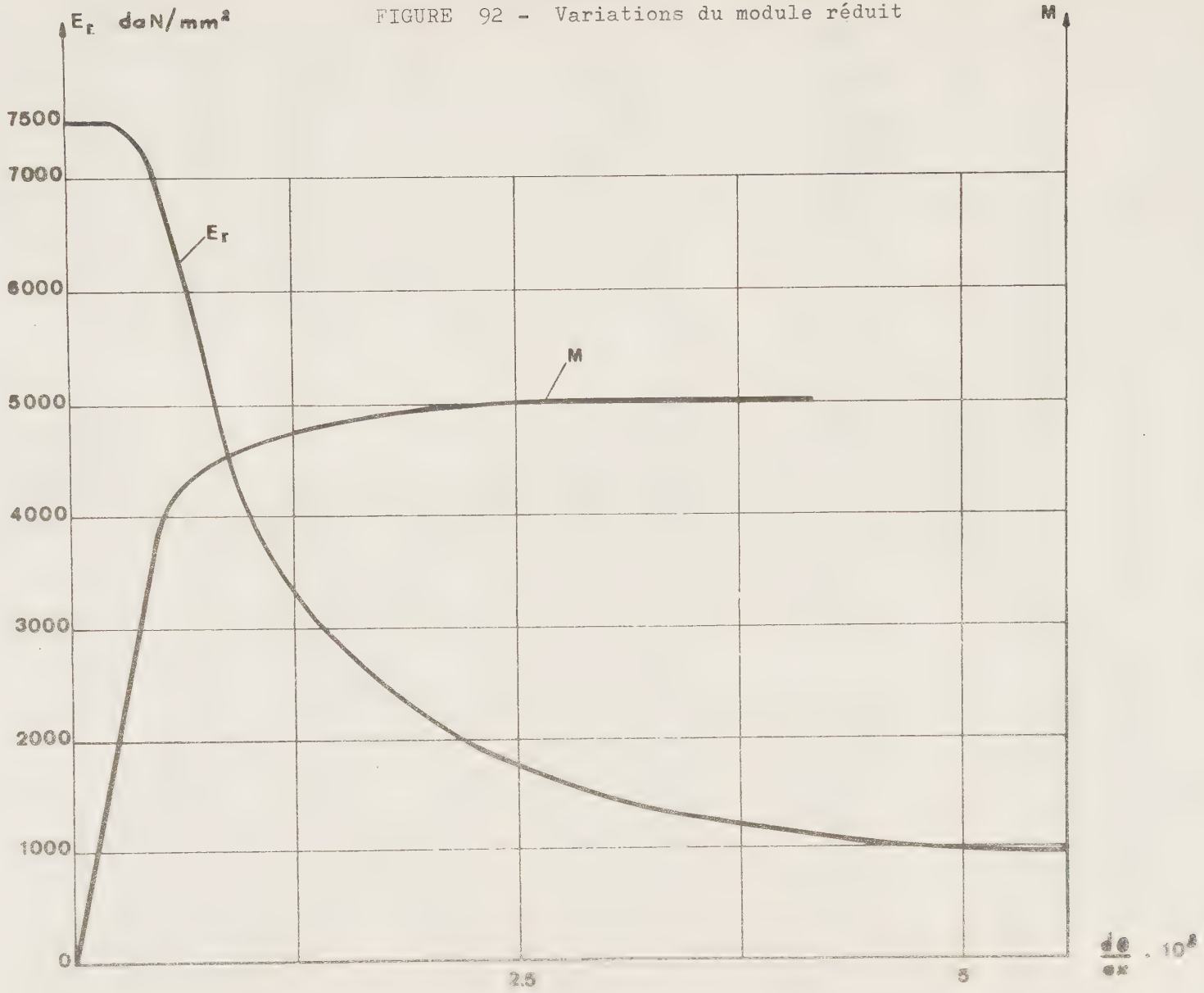
ou

$$- \frac{d\theta}{dx_1} . \frac{bh^3}{12} . \frac{12}{d^3} . \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sigma_1 \, e_1 \, de_1 = M$$

soit

$$\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{- M}{E_r \, I x_3} \qquad (118)$$

FIGURE 92 - Variations du module réduit



avec E_r module réduit $$E_r = \frac{12}{d^3} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sigma_1 \, e_1 \, de_1 \qquad (119)$$

Cette expression de E est déterminée à partir du diagramme de l'essai de traction du matériau.

Pour le matériau utilisé, les variations de E_r ,en fonction de d, sont représentées sur le graphique N° 92 .

L'équation (118) permet de déterminer la valeur absolue du moment de flexion en fonction du module apparent et de la rotation relative

$$M = E_r \, I_{x_3} \cdot \frac{d\theta}{dx_1} \qquad (120)$$

Connaissant les variations de E_r en fonction de d (ou de $\frac{d\theta}{dx_1}$ (117)). L'expression précédente permet de calculer les valeurs de M , en fonction de $\frac{d\theta}{dx_1}$. La courbe représentative de ces variations figure sur le plan N°

2.2.6.3 - Application à la flexion des raidisseurs

Le diagramme du moment de flexion relatif à un raidisseur reposant sur deux appuis distants de l , et supportant une charge uniformément répartie q est est représenté par une expression de la forme

$$M_f = \frac{q_1 \, l \, x_1}{2} - \frac{q_1 \, x_1^2}{2}$$

La valeur maximum de ce moment étant

$$M_{f_{max}} = \frac{q_1 \, l^2}{8}$$

Dans le domaine élastique, la courbe représentative des variations de sur la distance l , est représentée,au coefficient EIx_3 près, par la courbe du moment fléchissant.

La flèche au centre est proportionnelle à la charge q_1 , réellement supportée par le raidisseur.

Lorsque la contrainte maximum s'exerçant sur la section droite de la poutre atteint la limite élastique, le moment de flexion a pour valeur particulière M_e

avec $$M_e = \sigma_e \cdot \frac{bh^2}{6}$$

Pour les valeurs $M_{f_{max}} > M_e$ la courbe représentative de $\frac{d\theta}{dx_1}$ est déduite de la courbe du moment fléchissant, en divisant chaque ordonnée par la

quantité $E_r I_{x_3}$ correspondant à la même valeur de $\frac{d\theta}{dx_1}$

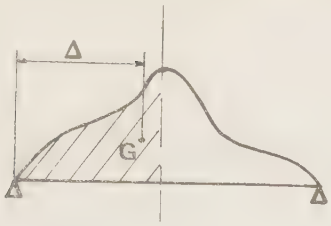


fig.93

La flèche maximum est directement déduite de la courbe ainsi obtenue.

$$\omega \max = A . \Delta$$

avec

$$A = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{E_r I_{x_3}} dx_1$$

G représentant le centre de gravité de l'aire achurée (Figure 93)

$$\Delta = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{E_r I_{x_3}} x_1 dx_1}{\int_0^{l} \frac{M}{E_r I_{x_3}} dx_1}$$

Les variations de la flèche au centre, en fonction de la charge q_1 ,ainsi obtenues, sont représentées sur le graphique N° 94

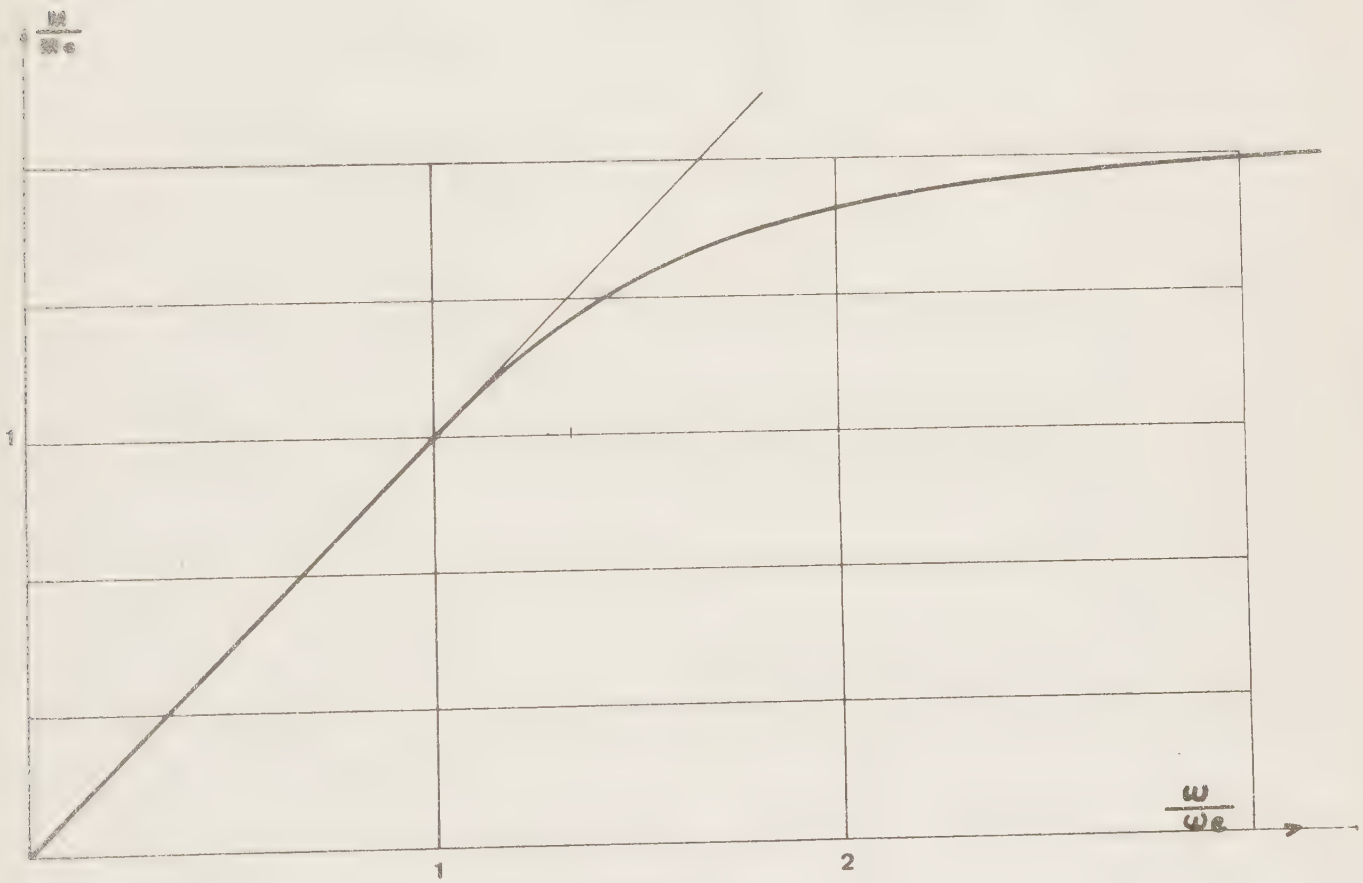


fig.94

On note que la ruine de la structure est obtenue pour la valeur M1 telle que :

$$M_l = \frac{5}{3} M_e$$

Notons que, dans le cas d'un matériau admettant un seuil de plasticité infini, le coefficient reliant la moment limite au moment Me, a pour valeur 3/2.

pour cette valeur particulière du moment de flexion, la flèche au centre tend vers l'infini.

2.2.6.4 - Application numérique : détermination de M_e pour la plaque 610

$$M_e = \sigma_e \frac{b h^2}{6}$$

$$M_e = \frac{35 \cdot 12 \cdot 26^2}{6} = 47\ 320$$

$$M_e = \frac{q_o l^2}{8}$$

$$q_o = \frac{8 \cdot 47320}{(794)^2} = 0,6$$

Cette pression q_o est répartie sur la largeur a

$$q = \frac{q_o}{a}$$

$$q = \frac{0.6}{135} = 44 \quad 10^{-4} \text{ daN/mm}^2$$

soit : $q \simeq$ 440 cm d'eau

ou : $q \simeq$ 32,6 cm de mercure

ETUDE EXPERIMENTALE

-:-:-:-:-:-

2.3.1 - MESURE DES FLECHES

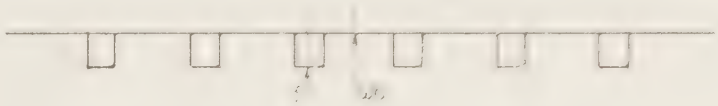
Dans le domaine plastique, les essais ont porté sur les plaques

210 - 414 - 510 - 610

Pour ces plaques, nous avons mesuré, la flèche au centre du panneau central et la flèche sous les raidisseurs adjacents à ce panneau.

Ces valeurs sont indiquées sur les graphes suivants et portent les repères

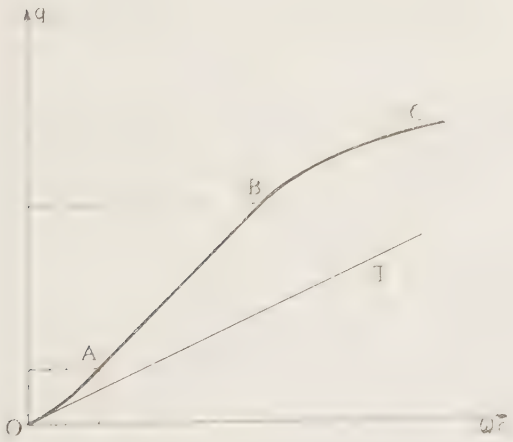
- flèche expérimentale au centre de la plaque : ω_0
- flèche expérimentale au milieu du raidisseur : ω_{11}



Les courbes théoriques, également représentées sur les graphes, sont calculées à partir des équations (113) et (114).

2.3.2 - INTERPRETATION DES RESULTATS

Les courbes représentant les variations des flèches au centre de la plaque, présentent toutes une forme analogue, schématisée sur le croquis ci-dessous.



Nous retrouvons, sur ces courbes, troi parties distinctes.

- Une partie courbe OA, correspondant au résultats obtenus dans les chapitres précédents, et traduisant les variations de la flèche au centre, en fonction de la pressio en tenant compte de l'effet de membrane.

La tangente OT, à cette courbe, représente les variations de la flèche en théori linéaire

La partie OA est notablement contractée par rapport [illegible]

ceci en raison du changement d'échelle, pratiqué pour les pressions.

- La partie droite AB montre que l'effet de membrane est inexistant à partir du point A. La plaque et les raidisseurs travaillent en flexion, et les flèches au centre sont proportionnelles aux charges.

La disparition de l'effet de membrane est dûe au phénomène de voilement, qui se produit à partir du point A. Ce voilement, qui se traduit par une série d'ondes, comme le montrent les clichés représentés sur les pages suivantes, annule l'action des forces normales situées dans le plan moyen de la plaque.

La partie de la droite AB est donnée par les expressions :

$$\omega_{11} = \frac{q_0 l^4}{EI} \cdot \frac{8}{\pi^5} \left[\frac{1}{2 + \frac{(1+\beta'^2)^2}{\lambda'}} \right]$$

$$\omega_{11} = \frac{\alpha'}{\alpha} \omega_0$$

En raison du voilement, la flèche au centre du panneau central, peut être localement très modifiée. Pour cette raison, les comparaisons entre les résultats théoriques et expérimentaux doivent de préférence porter sur les variations de la flèche au centre des raidisseurs.

- La courbe BC correspond au passage du domaine élastique au domaine plastique. Nous avons admis, dans le calcul théorique, que la contribution de la plaque à la flexion, devenait négligeable lorsque les déformations dûes au voilement étaient très importantes? Seuls, les raidisseurs, supportaient la charge constante uniformément répartie. Les comparaisons des résultats expérimentaux et théoriques confirment cette hypothèse.

Pour les plaques très minces, le passage du domaine élastique au domaine plastique, sera conditionné uniquement par le comportement des raidisseurs en flexion

Mise en évidence du phénomène de voilement

Les clichés représentés pages 147 et 148 montrent les déformations importantes des plaques et les ondes de voilement.

Sur les clichés N° 1 et N° 2 , ces ondes ont été artificiellement accentuées afin d'améliorer le contraste.

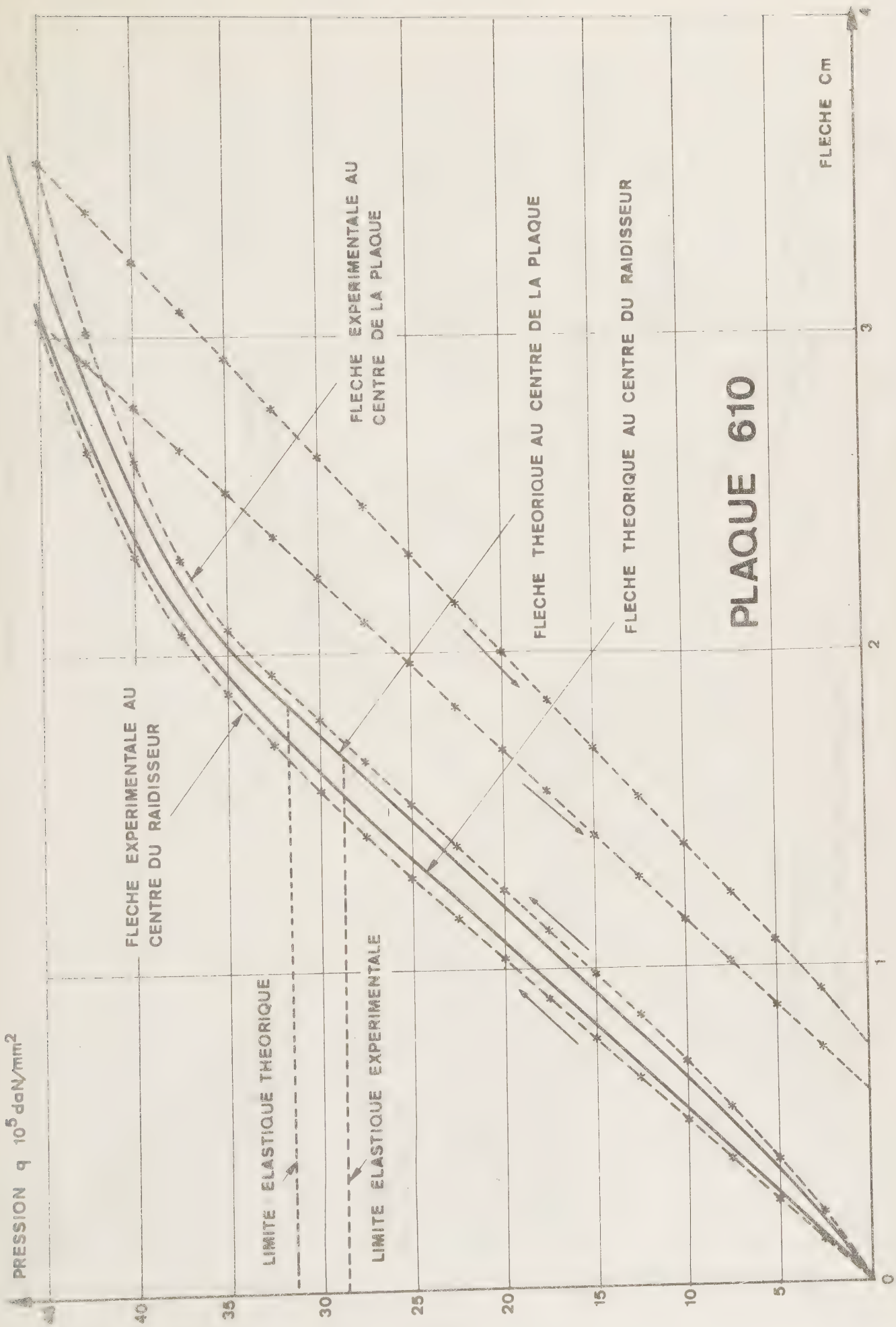

PRESSION q 10^5 daN/mm²
FLECHE Cm
PLAQUE 610
FLECHE EXPERIMENTALE AU CENTRE DE LA PLAQUE
FLECHE THEORIQUE AU CENTRE DE LA PLAQUE
FLECHE THEORIQUE AU CENTRE DU RAIDISSEUR
FLECHE EXPERIMENTALE AU CENTRE DU RAIDISSEUR
LIMITE ELASTIQUE THEORIQUE
LIMITE ELASTIQUE EXPERIMENTALE
0
1
2
3
4
5
10
15
20
25
30
35
40

fig. 92

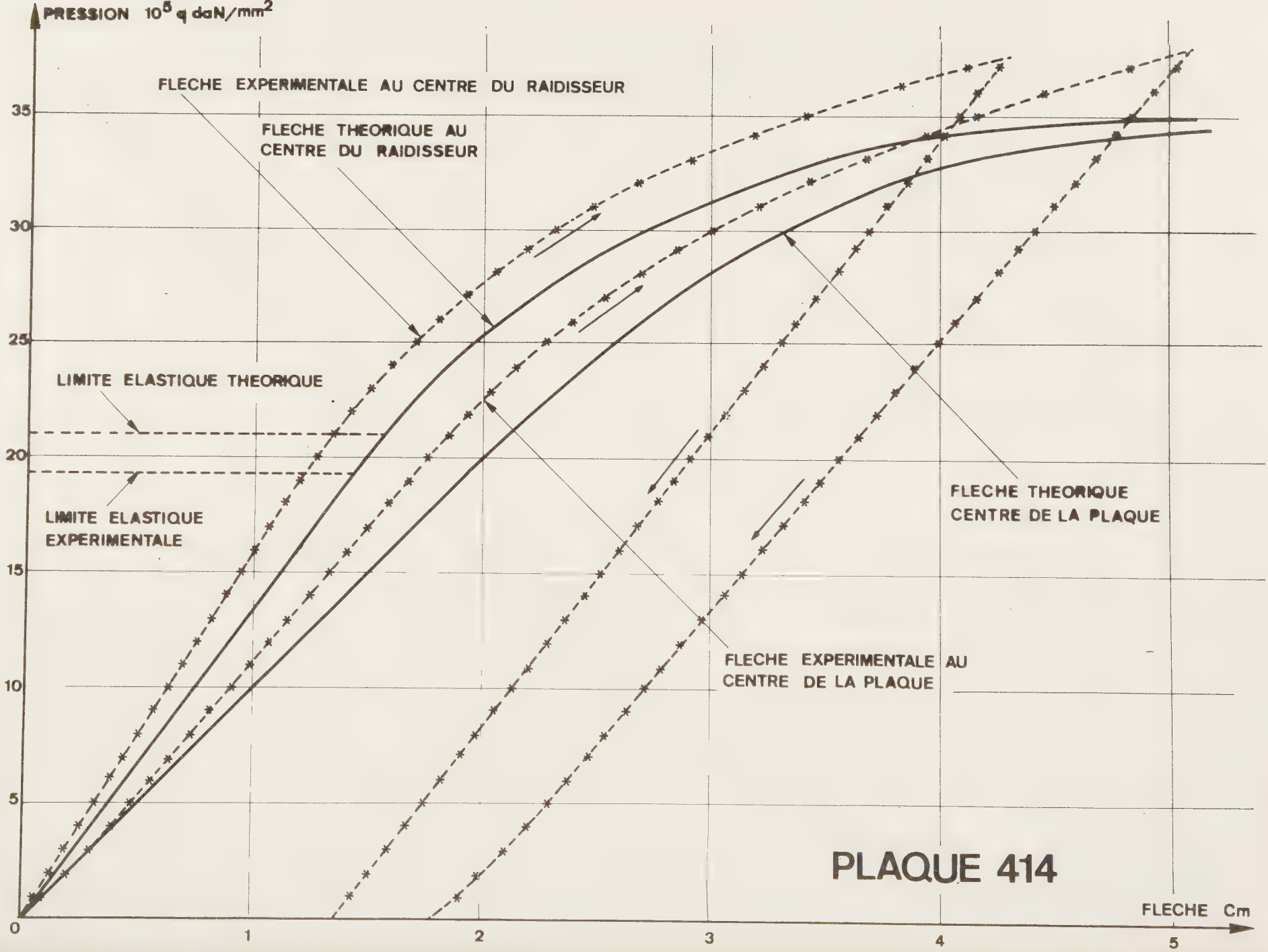

PRESSION 10^5 q daN/mm^2
FLECHE EXPERIMENTALE AU CENTRE DU RAIDISSEUR
FLECHE THEORIQUE AU CENTRE DU RAIDISSEUR
LIMITE ELASTIQUE THEORIQUE
LIMITE ELASTIQUE EXPERIMENTALE
FLECHE THEORIQUE CENTRE DE LA PLAQUE
FLECHE EXPERIMENTALE AU CENTRE DE LA PLAQUE
PLAQUE 414
FLECHE Cm
0
5
10
15
20
25
30
35
1
2
3
4
5

fig. 93

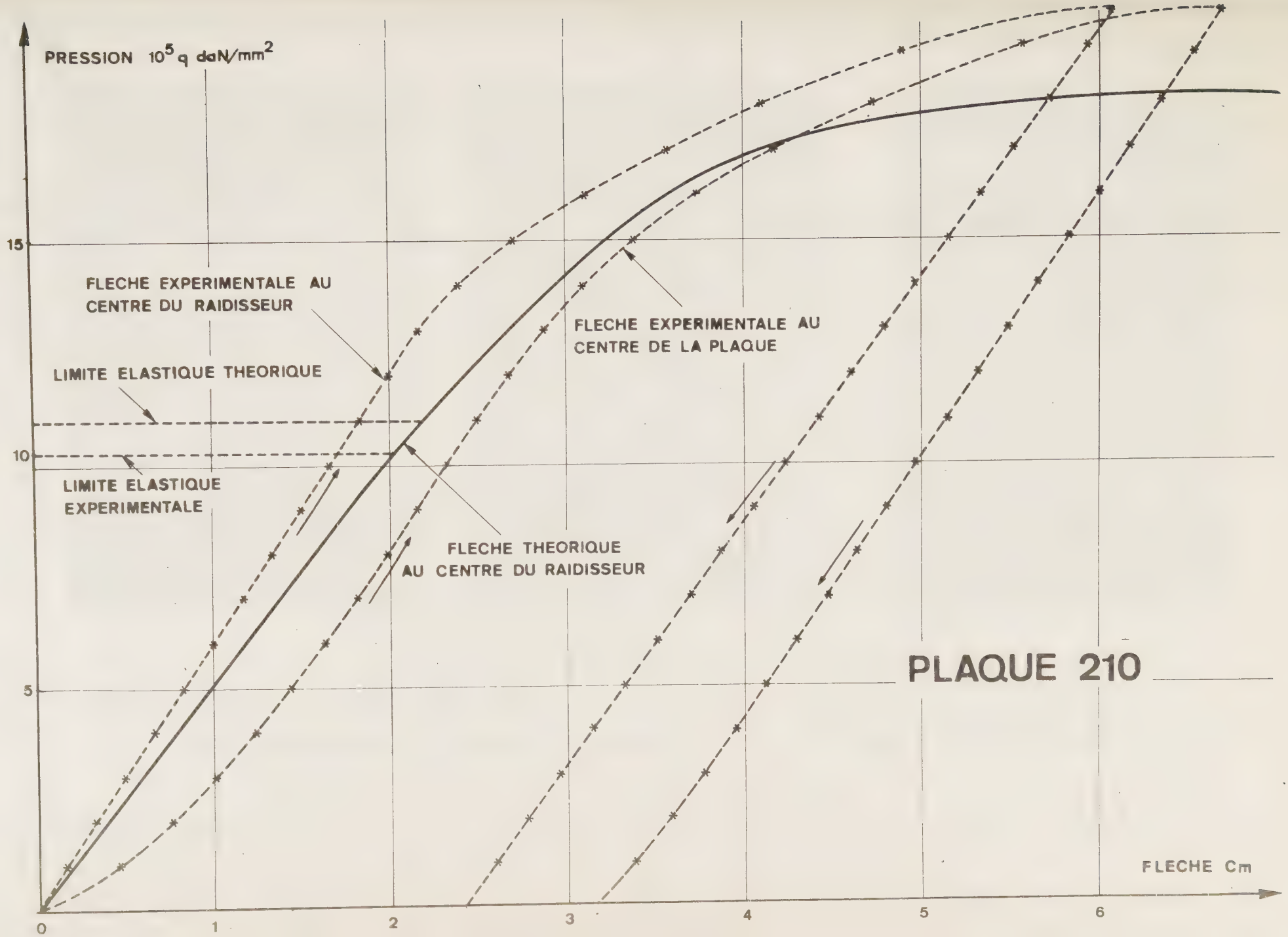

PRESSION 10^5 q daN/mm^2
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
FLECHE Cm
FLECHE EXPERIMENTALE AU CENTRE DU RAIDISSEUR
LIMITE ELASTIQUE THEORIQUE
LIMITE ELASTIQUE EXPERIMENTALE
FLECHE EXPERIMENTALE AU CENTRE DE LA PLAQUE
FLECHE THEORIQUE AU CENTRE DU RAIDISSEUR
PLAQUE 210

fig. 94

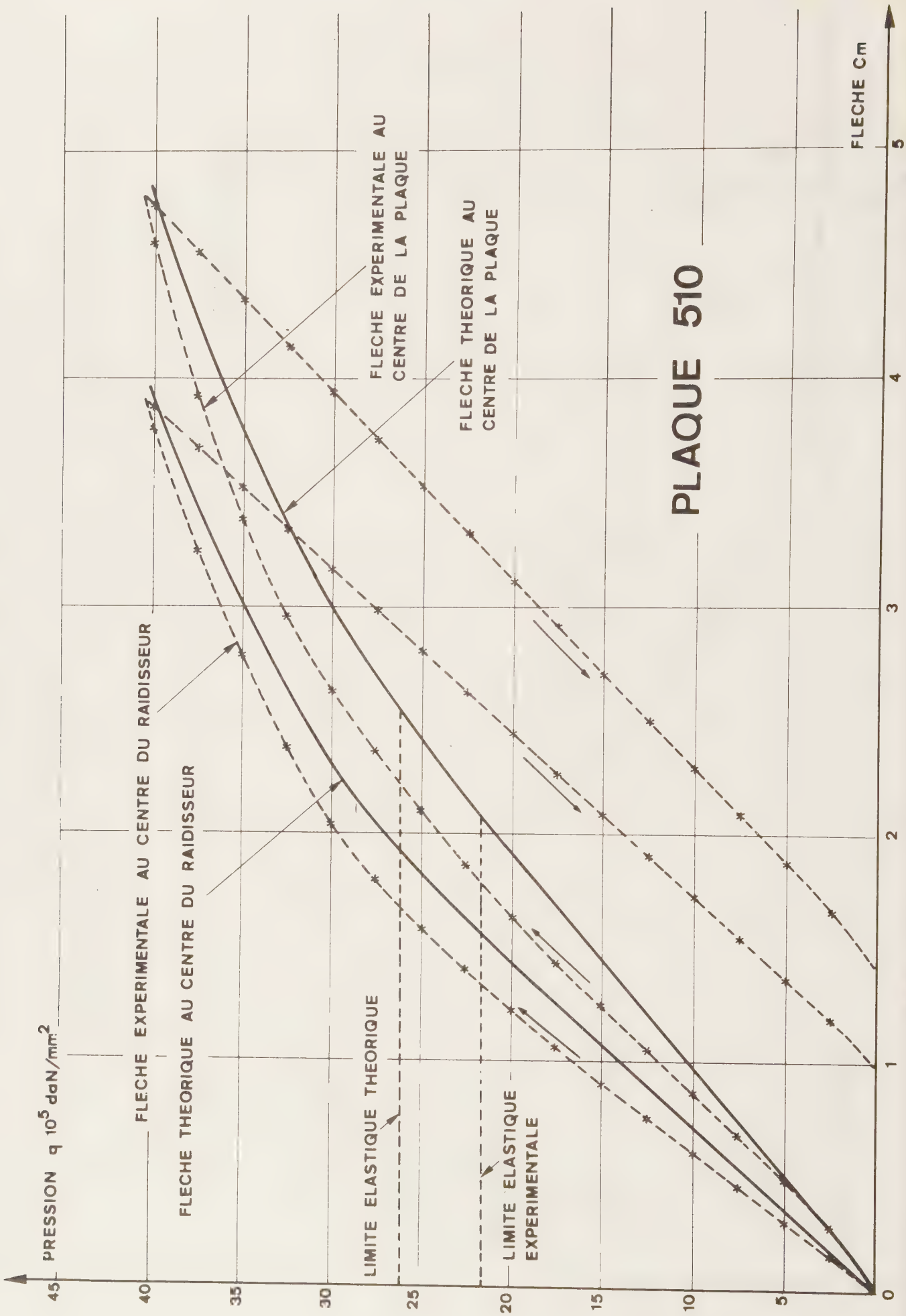
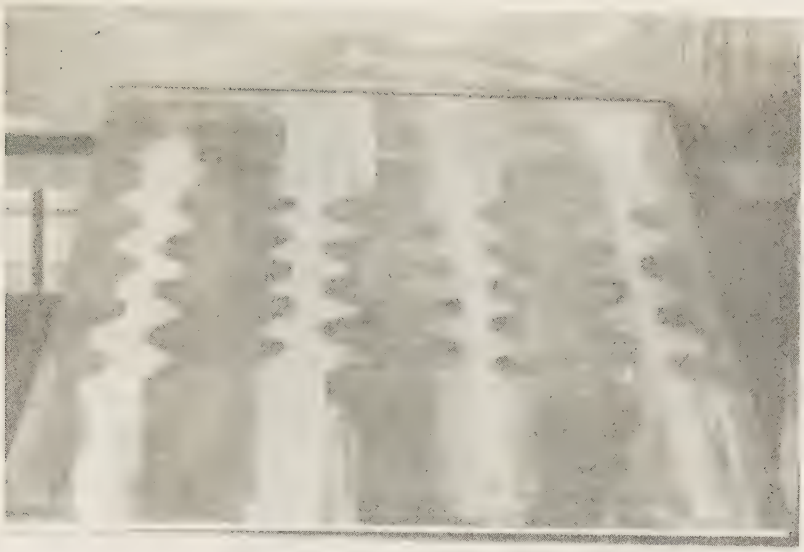

PLAQUE 510
PRESSION q 10^5 daN/mm^2
FLECHE Cm
FLECHE EXPERIMENTALE AU CENTRE DE LA PLAQUE
FLECHE THEORIQUE AU CENTRE DE LA PLAQUE
FLECHE EXPERIMENTALE AU CENTRE DU RAIDISSEUR
FLECHE THEORIQUE AU CENTRE DU RAIDISSEUR
LIMITE ELASTIQUE THEORIQUE
LIMITE ELASTIQUE EXPERIMENTALE
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5

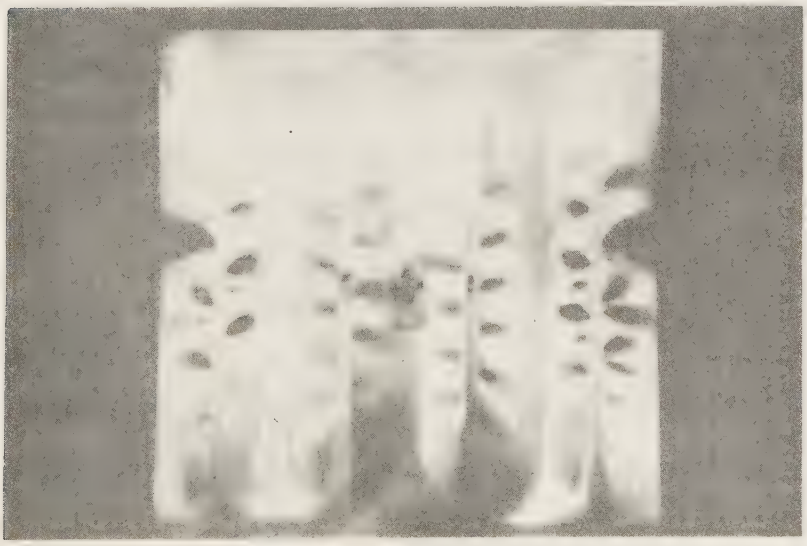
fig. 95



Cliché N° 1

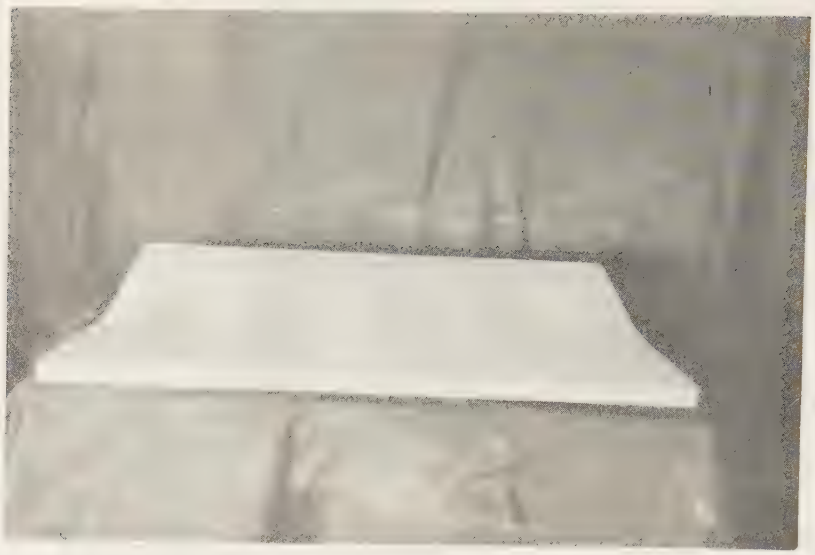
Cliché N° 2

Cliché N° 3



Grandes déformations des plaques

ondes de voilement



Cliché N° 4

Cliché N° 5

Déformations dans le domaine plastique

C O N C L U S I O N

-:-:-:-:-

Dans le présent exposé, nous avons tenté de faire la synthèse des différents travaux concernant le calcul des plaques orthotropes. Cette synthèse reste sans doute incomplète, mais nous avons cependant, par des constatations théoriques et expérimentales, pu mettre en évidence les points suivants :

1°) Dans le domaine élastique, et pour les faibles déformations, le calcul d'une plaque orthotrope peut être effectué de deux manières différentes

1.1 - En déterminant les rigidités équivalentes de la plaque et en résolvant l'équation différentielle de la déformée. Cette solution doit être adoptée pour les plaques épaisses renforcées par des raidisseurs proches les uns des autres. Dans cette méthode, les déformations propres de l'élément de la plaque compris entre deux raidisseurs, ne sont pas déterminées.

Pour les plaques renforcées par des raidisseurs rectangulaires, placés d'un seul côté de la plaque, nous avons pu montrer que la valeur de la rigidité obtenue, en assimilant la plaque orthotrope à une série T dont l'âme est formée par le raidisseur et la semelle par l'élément de la plaque de longueur égale au pas des raidisseurs, ne constitue qu'une approximation sommaire pouvant entraîner, pour certaines dimensions de plaque, des erreurs relatives de l'ordre de 30 %.

1.2 - Une seconde méthode, que nous avons retenue, consiste à calculer chaque élément de plaque compris entre les raidisseurs, comme une plaque isotrope encastrée sur des raidisseurs élastiques pouvant se déformer en flexion. Dans ce cas, (en chaque point de la plaque ou des raidisseurs) les flèches et la pression constante uniformément répartie sont liées par une relation faisant intervenir un coefficient qui dépend des dimensions de la plaque et des raidisseurs.

Ce coefficient a été déterminé :

a) Pour toute la plage allant du raidisseurs de rigidité nulle (on obtient dans ce cas une plaque isotrope) au raidisseur infiniment rigide (appui rigide).

b) Pour différentes valeurs de l'entraxe des raidisseurs.

Au cours de notre recherche bibliographique, nous n'avons pas relevé

d'autres valeurs de ce coefficient que celles correspondant à l'appui rigide. Dans ce cas particulier, les valeurs que nous avons déterminées sont très voisines de celles publiées.

2°) Dans le domaine élastique, et pour des déformations plus importantes, le comportement de la plaque est modifié par l'influence des forces normales agissant dans le plan moyen (effet de membrane).

La détermination de l'influence de ces forces a été établie dans le cas où les raidisseurs restent dans le même plan au cours des déformations (torsion et rapprochement nuls). Ce cas correspond à celui des plaques longues ayant un nombre important de raidisseurs (> 6).

Les résultats théoriques et expérimentaux confirment que l'effet de membrane augment lorsque l'entraxe et la rigidité des raidisseurs croissent.

Les déformations de la plaque ne sont plus linéaires en fonction des charges.

3°) Dans le domaine élastique, si la charge uniformément répartie augmente, un phénomène de voilement de la plaque apparaît (ceci pour les plaques très minces) l'effet de membrane s'annule et les déformations redeviennent linéaires.

Il est possible, dans certains cas, d'obtenir des flèches maxima atteignant 15 fois l'épaisseur de la plaque, avant d'atteindre le domaine plastique. Les déformations locales sont très importantes mais restent réversibles.

Ce phénomène a été mis en évidence expérimentalement, et les calculs théoriques effectués, en tenant compte du voilement de la plaque, ont permis de confirmer ces résultats.

4°) Le domaine plastique est essentiellement déterminé pour les plaques très minces, par le comportement des raidisseurs.

La plaque après voilement peut être considérée comme ayant une rigidité nulle en flexion. Les raidisseurs seuls supportant la quasi totalité de la charge.

Comme continuité à ce travail, nous envisageons de poursuivre l'étude du domaine des grandes déformations correspondant à la phase de voilement, car, les déformations, pour lesquelles l'effet de membrane est prépondérant, couvrent une plage relativement faible (2 à 3 fois l'épaisseur de la plaque) et les résultats obtenus dans ce domaine sont satisfaisants.

Nous envisageons donc, pour améliorer les résultats théoriques obtenus, de reprendre la détermination, des charges critiques de voilement, des énergies internes emmagasinées au cours des déformations et du travail des forces exté-

rieures en adoptant des développements mathématiques non limites aux termes du premier ordre, et d'étudier le passage du domaine élastique au domaine plastique, en faisant intervenir les changements antérieurs subis par la plaque, ainsi que les vitesses d'application des charges.

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-:-:-:-:-

1 - ABDELMIGID et N.W. WILLIAMSON
- A Grid analogy for the non linear behaviour of elastic Flat Plates
Int J Mech Sci. Pergamon Press Ltd 1967
Vol 9 pp 257 259 - Printed in Great Britain

2 - BARES et MASSONNET
- Calcul des grillages et poutres et dalles orthotropes - Dunod Editeur

3 - BOUSSINESQ
- J. math. série 3 vol 5 1879

4 - BREUNEVAL
- Sur l'énergie de déformation des coques minces élastiques
CR Acad. Sciences 1967 . Tome 264 N° 21 881 . 2

5 - CEYLON
- Stabilité élastique
Centre des Hautes Etudes de la Construction - Tome 2

6 - CHENEAU
- Essais Calculs et possibilités extrêmes des grillages plans

7 - CLARKSON
- Tests of Flat plated grillages under uniform pressure
Trans. r. Instru. nav. Archi. G B.
1965 . 105 . 467.84

8 - DANA YOUNG
- Deflections and Moments for Rectangular Plates with hydrostatic Loading
Jal Of Applied Mechanics
Dec 1943 p. 229 - 231

- Analysis of clamped Rectangular Plates

Jal Of Applied Mechanics
Dec 1940 p. 139 - 142

9 - DESAI

- A Survey of numerical procedures for the Analysis of plate and Schell Problems'

J. Instn Engrs (India) Civ Eng ng Div
1966 46 5 481 8
CNRS 28.3.6007

10 - DRAGANU

- Considérations sur la distribution des tensions dans les plaques orthotropes héterogènes

Mathematica Vol 6 (29) . 1 . 1964 pp 35 . 45

11 - ELIAS

- Cartesian Formulation of membrane theory

Proc. amer. Soc. Civ.
Engrs Journal Engineering Mechanics Division
1967 Tome 33 N°2 99 - 114
CNRS 28.3. 16689

12 - FUCHS

- Plates with boundary conditions of elastic support
Proc. American Society Civil Engineers
June 1953 Vol. 79 N°199

13 - FUZY

- Analysis of homogeneous orthotropic quadrangular Panels

Acta Technica academiae Scientiarum Hungaricae
Tome 59 pp 11.20 1957

14 · GRINTER

- Theory of modern Steel structures (The Mac Millan Company)

15 - GUYON

- Constructions en béton - Eyrolles

16 - HASHIN

- Etude d'une plaque rectangulaire raidie par deux poutres de rives
Eyrolles

17 - HEARMON et ADAMS

- Bending and Twisting of Anisotropie plates

British Jal of Applied Physics.
1952 Vol 3 page 150

18 - HOLL

- Analysis of Plate exemples by Difference methods and the Superposition Principle

CNRS B.S. 11153

19 - HOPPMANN

- Bending of orthogonally Stiffened plates

Jal of Applied Mechanics
June 1955 Vol. 22 N°2 pp 267.271

- A Study of orthogonally Stiffened plates
Jal of Applied Mechanics
Sept. 1956 pp.343.350

20 - HUBER

- Théorie rationnelle des hourdis en béton armé considérés comme des plaques minces d'une simple anisotropie orthogonale

C.R. Académie des Sciences
1920 T. 170 pp. 511.513

21 - HUFFINGTON

- Theoritical Determination of Rigidity Properties of orthogonally Stiffened plates

Jal of Applied Mechanics
March. 1956 pp. 15.20

22 - JAEGER et KATWIJK

- Analyse théorique d'expériences exécutées pour déterminer la résistance des cloisons en tôles planes renforcées

23 - JANAS

- Influence of position of lateral restraints on carring capacities of plates

CNRS 28.3.4225 Arch. Ingr. Lad. Polska
1966 12.3. 231 . 44

24 - KASHANI - SABET

- Voiles minces sans flexion - Recherche des conditions aux limites

CNRS 28.3.13113 Ref. Bul. Signaletique

25 - KAWAI Tadahiko

- Influence surfaces of orthotrope plates

Rep. Inst. industr. Sci. Univ. Tokyo
1964 13 N° 6 180.267

26 - KINLOCH

- The Bending of an orthotropic strip to an anticlastic Surface

Kleine Mitteilungen

27 - LECHNITZKY

- Anisotropic Plates - 2° edi. Moscou 1957

28 - LEVY M. et Samuel

- Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire

C.R. Académie des Sciences
1899 T. 129 pp. 535. 539

- Report 740
Square plate with clamped adges under normal pressure producing large deflections

National advisory committec for aeronautics

29 - LIBRESCU

- On the theory of anisotropie elastic
Shells and plates

CNRS 28.3.9514
International J. Solids Struct
1967 . 3 . 1 . (53 - 68)

30 - MALLET

- Le Calcul des Treillis et Plaques encastrés sur leurs quatre côtés

CNRS Bul. Signal. Ref. 28.3.1196

31 - MARCUS

- Bending of Orthogonally Stiffened plates

Jal of Applied Mechanics
Dec. 1955 Vol. 22 N°4 p. 607

32 - MASSONNET et SAVE

- Résistance des matériaux - Dunod Paris

33 - MAZURKIEWICZ

- The problem of elastic bending and stability of rectangular plates reinforced with ribs of variable cross section

Archiwum Mechniki Stosowanej
5 . 17 . 1965

34 - MESZAROS

- Sur la distribution des contraintes dans les plaques orthotropes

Stavebnicky casopis sav XIV 3 . Bratislava 1966

35 - MICHAEL

- The structural action of Multi-Stringer Shear panels

Int. J . Mach. Sci. Pergamon Press Ltd
1965 Vol 7 pp 577. 587

36 - MOHSEN ALWAN

- Bending of Sandwich plates with large deflections

Jal of the Engineering Mechanics Division
June 1967 E M 3 (5286 - 93)

37 - MORLEY

- Some variational principles in plate bending problems

Quart J . Mech appl Math G B.
1966 Tome 19 3. 371 - 386
CNRS 28 . 3 . 5987

38 - NASH

- Effect of a concentric reinforcing ring on stiffness and strength of a Circular Plate

Jal of Applied Mechanics
1948 T. 15 p. 25 - 29

39 - ODLEY

- Deflections and Moments of a Rectangular Plate Clamped on all Edges and under hydrostatic Pressure

Jal of Applied Mechanics
Dec. 1947 p. 289 . 295

40 - PLANTENA

- Bending of orthotropic plates

CNRS 28.3.4204
G. Congrès Aeronaut. Europ Munich

41 - REISSNER

- On the theory of bending of elastic plates

Jal of Math and Phys
1943 - 44 Vol. 22.23 pp. 184 - 194

42 - SCHADE

- The Orthonally Stiffened Plate under Uniform lateral Load

Jal of Applied Mechanics 1940 Vol 7 N°1 pp; 143 à 146

43 - STEWART WAY

- Uniformly Loaded Clamped Rectangular Plates with large deflection

Proc 5 th Int Congr. on Applied Mechanics
1938 pages 123.1 128

44 - SUNDARA

- Large deflection of Rectangular plates

International Journal non Linear Mech. G B.
1966 1 . 2 . 109 . 22
CNRS 28 . 3 . 5978

45 - THORNE

- Square plates Fixed at points

Jal of Applied Mechanics
Mars 1948 pp. 73 . 79

46 - TIMOSHENKO

- Théorie des plaques et coques

47 - YETTRAM and HUSAIN

- Grid - Framework method for plates in flexure

Jal of the Engineering Mechanics Division
Proceedings of the American Society of Civil Engineers
June 1965 EM 3 4361 pp. 53.64

48 - ZIENKIEWICZ

- The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs

Inst. Civ. Eng. Proc. GB
Août 64 28. 471.88 26.3.7625

49 - MASSONNET - SAVE

- Calcul plastique de Constructions
Volumes 1 et 2 (1963
Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier

50 - DRUCKER

- Introduction to mechanics of deformable solids
Mc. Graw - Hill Book company

51 - HILL

- The mathematical theory of Plasticity
Oxford - At the Clarendon Press

52 - BLEICH

- Buckling Strength of metal structures
Mc Graw Hill Book company

53 - TIMOSHENKO

- Théorie de la stabilité élastique

Librairie polytechnique Ch. Beranger

54 - DELLUS

- Résistance des Matériaux (1964)

Technique et Vulgarisation - Paris

Imprimerie E.N.S.M. NANTES